Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie I

1.	**B**
2.	**A**
3.	**C**

1) La fonction f_2 est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$.

2) L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$

3) $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0,1[$, strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$ et enfin, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en leur point d'abscisse 1. Donc le tableau de signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Partie II

1) Limite en 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et donc en additionnant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en $+\infty$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$. Par suite, en additionnant

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ puis la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) On note tout d'abord que $f(1) = \ln(1) + 1 - 1 = 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, si x est un réel tel que $0 < x < 1$, on a $f(x) < f(1)$ ou encore $f(x) < 0$. Si x est un réel tel que $x > 1$, on a $f(x) > f(1)$ ou encore $f(x) > 0$. On résume ces résultats dans un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4) La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

5) La fonction F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée, à savoir f, est strictement positive sur $]1, +\infty[$ d'après la question 3). Donc, la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

6) La fonction F est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc pour tout réel k de l'intervalle $\left[F(1), \lim_{x\to+\infty} F(x)\right[$, l'équation $F(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$.
Or, $F(1) = 0$ et $1 - \dfrac{1}{e} = 0,6\ldots$. Donc $F(1) < 1 - \dfrac{1}{e}$. D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) > 1 - \dfrac{1}{e}$. Ainsi, $1 - \dfrac{1}{e} \in \left[F(1), \lim_{x\to+\infty} F(x)\right[= [0, +\infty[$ et donc l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[1, +\infty[$.

7) $F(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{e} = 0,63\ldots$ Ensuite, $F(1,9) = 0,57\ldots$ et $F(2) = 0,69\ldots$. Donc $F(1,9) < F(\alpha) < F(2)$. Puisque la fonction F est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{1,9 < \alpha < 2.}$$

Partie III

1) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1}{e}, 0\right).}$$

2) Soit x un réel strictement positif.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

D'après l'étude du signe de la fonction f effectuée à la question II.3), l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule à savoir $x = 1$. Comme $g(1) = h(1) = 1$,

$$\boxed{\text{le point } P \text{ a pour coordonnées } (1, 1).}$$

3) a) Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $g(x) - h(x) = -\ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x} = -f(x)$. D'après la question II.3), la fonction f est négative sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ et donc la fonction $g - h$ est positive sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$. Par suite,

$$\mathscr{A} = \int_{1/e}^{1} (g(x) - h(x))\, dx = \int_{1/e}^{1} (-f(x))\, dx.$$

b) D'après la question II.4), on en déduit que

$$\mathscr{A} = [-F(x)]_{1/e}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) = -0 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln(e) + \ln(e) = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}.}$$

4) a) Soit t un réel strictement supérieur à 1. Dans ce cas, pour tout réel x de $[1, t]$, on a $h(x) - g(x) = f(x) \geqslant 0$. Par suite,

$$\mathscr{B}_t = \int_1^t (h(x) - g(x))\, dx = \int_1^t f(x)\, dx = [F(x)]_1^t = F(t) - F(1) = F(t) = t\ln(t) - \ln(t).$$

b) Soit $t \geqslant 1$. D'après la question II.6),

$$\mathcal{B}_t = \mathscr{A} \Leftrightarrow F(t) = 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow t = \alpha.$$

Il existe un réel t et un seul tel que $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}$: le réel α défini à la question II.6).

