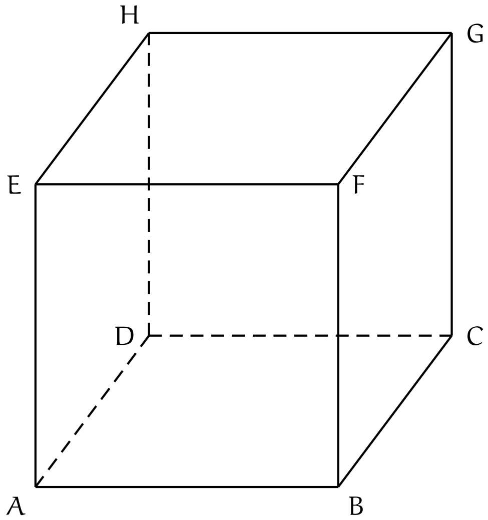
Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

On note K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

Partie A

1) Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

2) Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment [HG].
On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0;1]$).

1) Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0;1]$, le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\dfrac{1}{6}$.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1+m)x + y - mz = 0$.

3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par E et perpendiculaire au plan (MFD). En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E′ du point E sur le plan (MFD) en fonction de m.

b) Montrer que $EE' = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$. On pose $d_m = EE' = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

On admet que d_m est la plus courte distance du point E à un point du plan (MFD). Le nombre d_m s'appelle la « distance du point E au plan (MFD) ».

c) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

d) En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

