

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Notons (x, y, z) les coordonnées du point K dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Le point D a pour coordonnées $(0, 0, 0)$. D'autre part, puisque $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 1 \overrightarrow{DA} + 1 \overrightarrow{DC} + 1 \overrightarrow{DH}$, le point F a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

$$\text{L'égalité } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{FD} \text{ fournit } \begin{cases} x - 1 = -\frac{1}{3} \\ y - 1 = -\frac{1}{3} \\ z - 1 = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ et donc } x = y = z = \frac{2}{3}.$$

Les coordonnées du point K sont $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

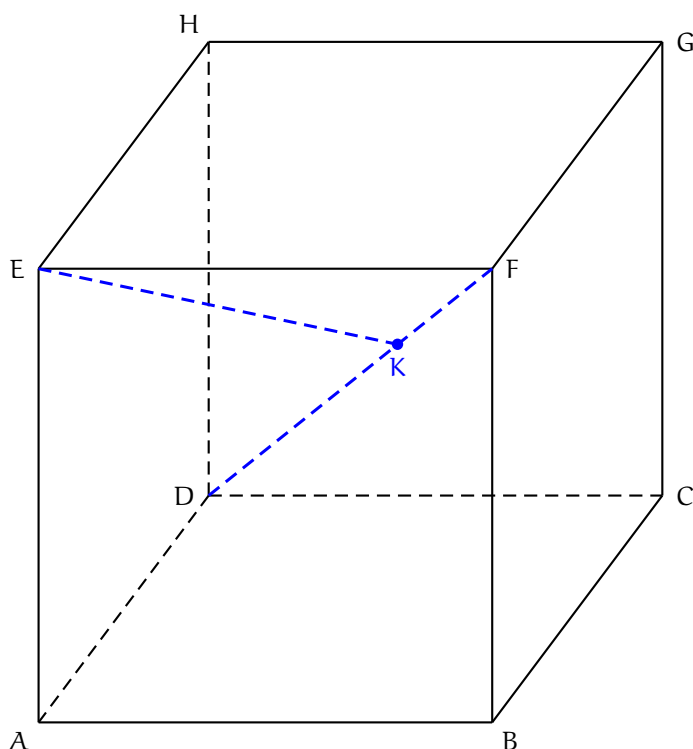
2) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point E a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ puis

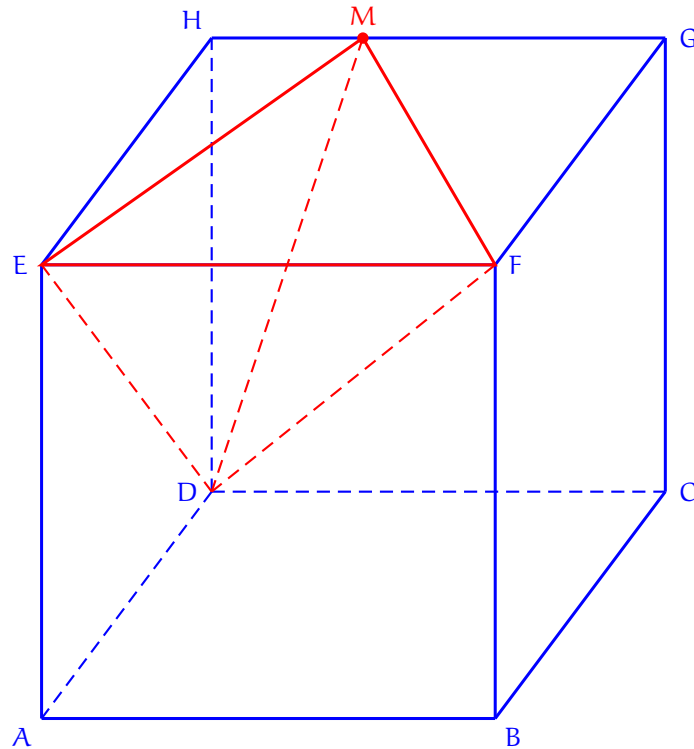
$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 = 0.$$

On a montré que les vecteurs $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux et donc que

les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) $EK = \|\overrightarrow{EK}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$





1) Notons V le volume du tétraèdre EMFD. La projection orthogonale du point D sur le plan (EMF) est le point H. Donc

$$V = \frac{1}{3} \times DH \times \text{aire de (EMF)} = \frac{\text{aire de (EMF)}}{3}.$$

Ensuite, si M_0 est le projeté orthogonal du point M sur le segment [EF], on a $MM_0 = EH$ et donc

$$\text{aire de (EMF)} = \frac{EF \times MM_0}{2} = \frac{EF \times HE}{2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

$V = \frac{1}{6}.$

2) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point D a pour coordonnées $(0, 0, 0)$, le point F a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point M a pour coordonnées $(0, m, 1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{DM}$ a pour coordonnées $(0, m, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DF}$ alors nécessairement $0 = k \times 1$ et aussi $1 = k \times 1$ ce qui impose $k = 0$ et aussi $k = 1$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points D, F et M ne sont pas alignés. Les points D, F et M définissent donc un unique plan.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

- $(-1 + m)x_D + y_D - mz_D = (-1 + m) \times 0 + 0 - m \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$. Donc $D \in \mathcal{P}$.
- $(-1 + m)x_M + y_M - mz_M = (-1 + m) \times 0 + m - m \times 1 = 0 + m - m = 0$. Donc $M \in \mathcal{P}$.
- $(-1 + m)x_F + y_F - mz_F = (-1 + m) \times 1 + 1 - m \times 1 = -1 + m + 1 - m = 0$. Donc $F \in \mathcal{P}$.

En résumé, les points D, M et F appartiennent à $\mathcal{P}$ ce qui montre que $\mathcal{P}$ est le plan (MFD) ou encore que

une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

3) a) Un vecteur normal au plan (MFD) est le vecteur $\vec{n}(-1 + m, 1, -m)$.

La perpendiculaire (Δ) au plan (MFD) passant par E est la droite passant par E(1, 0, 1) et vecteur directeur $\vec{n}(-1 + m, 1, -m)$. Un système d'équations paramétriques de (Δ) est donc

$$\begin{cases} x = 1 + (m-1)t \\ y = t \\ z = 1 - mt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le point E' est le point d'intersection de (Δ) et du plan (MFD).

Soit N(1 + (m-1)t, t, 1 - mt), t ∈ ℝ, un point quelconque de (Δ).

$$\begin{aligned} N \in (\text{MFD}) &\Leftrightarrow (m-1)(1 + (m-1)t) + (t) - m(1 - mt) = 0 \Leftrightarrow [(m-1)^2 + 1 + m^2] t + m - 1 - m = 0 \\ &\Leftrightarrow [(m-1)^2 + 1 + m^2] t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}, \end{aligned}$$

car $(m-1)^2 + 1 + m^2 \geq 1$ et en particulier, $(m-1)^2 + 1 + m^2 \neq 0$.

Quand $t = \frac{1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}$, on obtient E' $\left(1 + \frac{m-1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}, \frac{1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}, 1 - \frac{m}{(m-1)^2 + 1 + m^2}\right)$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{EE'}$ a pour coordonnées $\left(1 + \frac{m-1}{(m-1)^2 + 1 + m^2} - 1, \frac{1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}, 1 - \frac{m}{(m-1)^2 + 1 + m^2} - 1\right)$

ou encore $\left(\frac{m-1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}, \frac{1}{(m-1)^2 + 1 + m^2}, -\frac{m}{(m-1)^2 + 1 + m^2}\right)$. Donc,

$$d_m = EE' = \frac{1}{(m-1)^2 + 1 + m^2} \sqrt{(m-1)^2 + 1^2 + (-m)^2} = \frac{1}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

Pour tout m de [0, 1], $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

c) La distance d_m est maximale si et seulement si $2m^2 - 2m + 2$ est minimal.

Pour tout réel m de [0, 1],

$$\begin{aligned} 2m^2 - 2m + 2 &= 2(m^2 - m + 1) = 2\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = 2\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \\ &= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout de $m \in [0, 1]$, $2m^2 - 2m + 2 \geq \frac{3}{2}$ avec égalité si et seulement si $m = \frac{1}{2}$ puis $d_m \leq \frac{1}{\sqrt{3/2}}$ avec égalité si et seulement si $m = \frac{1}{2}$. En résumé, la distance d_m est maximale si et seulement si $m = \frac{1}{2}$ ou encore si et seulement si M est le milieu du segment [HG].

La distance d_m est maximale quand M est le milieu de [HG].

c) Quand $m = \frac{1}{2}$, une équation du plan (MFD) est $-\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0$ ou encore $x - 2y + z = 0$. Tout d'abord, $x_K - 2y_K + z_K = \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ et donc le point K appartient au plan (MFD).

Ensuite, un vecteur normal au plan (MFD) est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1, -2, 1). D'autre part, d'après la question A.2), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EK}$ sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Par suite, $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{3}\vec{n}$ et en particulier, $\overrightarrow{EK}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ ou encore le vecteur $\overrightarrow{EK}$ est un vecteur normal au plan (MFD).

En résumé, le point K appartient au plan (MFD) et le vecteur $\overrightarrow{EK}$ est orthogonal au plan (MFD). On en déduit que

quand d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (MFD).