Polynésie 2011. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3) Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$ (modulo 11).

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6) a) Démontrer que $10^8 \equiv -1$ (modulo 17) puis que $10^{16} \equiv 1$ (modulo 17).

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

