Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1

1. **VRAI**

2. **VRAI**

3. **FAUX**

4. **VRAI**

5. **VRAI**

Justification 1.

- $OA = |z_A| = |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$.
- $OB = |z_B| = |7-3i| = \sqrt{7^2+(-3)^2} = \sqrt{58}$.
- $AB = |z_B - z_A| = |(7-3i)-(2-5i)| = |5+2i| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$.

Donc, $AB = AO$ et le triangle OAB est isocèle en A. De plus, $AO^2 + AB^2 = 29 + 29 = 58 = OB^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en A.

Finalement, le triangle OAB est rectangle et isocèle en A. La proposition 1 est vraie.

Justification 2. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|z-i| = |z+2i| &\Leftrightarrow |x+i(y-1)|^2 = |x+i(y+2)|^2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+2)^2\\ &\Leftrightarrow y^2-2y+1 = y^2+4y+4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(Δ) est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses qui est l'axe des réels. La proposition 2 est vraie.

Justification 3.

$$3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}.$$

Ensuite, si n est un entier naturel non nul,

$$z^{3n} = \left(2\sqrt{3}e^{i\pi/6}\right)^{3n} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{i3n\pi/6} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3n} e^{in\pi/2}.$$

En particulier, si $n = 2$, on obtient

$$z^6 = z^{3\times 2} = \left(2\sqrt{3}\right)^{3\times 2} e^{i2\pi/2} = -\left(2\sqrt{3}\right)^6$$

qui n'est pas un imaginaire pur. Donc la proposition 3 est fausse.

Justification 4. Un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{2}$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive. Posons $z = iy$ où y est un réel strictement positif.

- $|i+z| = |i(y+1)| = |i| \times |y+1| = y+1$ car $|i| = 1$ et car $y+1 \geqslant 0$.
- $1+|z| = 1+|iy| = 1+|i|\times|y| = y+1$ car $|i| = 1$ et car $y \geqslant 0$.

Donc $|i+z| = 1+|z|$ et la proposition 4 est vraie.

Justification 5. Soit z un nombre complexe de module 1. Il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}z^2+\frac{1}{z^2} &= (e^{i\theta})^2 + \frac{1}{(e^{i\theta})^2} = e^{2i\theta}+e^{-2i\theta} = \cos(2\theta)+i\sin(2\theta)+\cos(2\theta)-i\sin(2\theta)\\ &= 2\cos(2\theta).\end{aligned}$$

Donc $z^2+\frac{1}{z^2}$ est un nombre réel et la proposition 5 est vraie.