

Nouvelle Calédonie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(3, 2, -2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(0, 2, 1)$. Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 + (-2) \times 1 = 2.$$

D'autre part,

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17} \text{ et } AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2, AB = \sqrt{17} \text{ et } AC = \sqrt{5}.$$

b) On sait que

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{2}{\sqrt{17} \times \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}}.$$

La calculatrice fournit alors

$$\widehat{BAC} = 77 \text{ degrés au degré près.}$$

c) En particulier, $\widehat{BAC} \neq 0^\circ$ et $\widehat{BAC} \neq 180^\circ$ et donc

les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) D'après la question 1)c), les points A, B et C ne sont pas alignés et donc ces trois points définissent un unique plan, le plan (ABC).

Soit (P) le plan d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$.

- $2x_A - y_A + 2z_A + 2 = 2 \times (-2) - 0 + 2 \times 1 + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$. Donc $A \in (P)$.
- $2x_B - y_B + 2z_B + 2 = 2 \times 1 - 2 + 2 \times (-1) + 2 = 2 - 2 - 2 + 2 = 0$. Donc $B \in (P)$.
- $2x_C - y_C + 2z_C + 2 = 2 \times (-2) - 2 + 2 \times 2 + 2 = -4 - 2 + 4 + 2 = 0$. Donc $C \in (P)$.

Donc, les points A, B et C appartiennent au plan (P). On en déduit que le plan (ABC) est le plan (P) ou encore que

une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in P_1 \cap P_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 3z - 3 \\ (-y + 3z - 3) - 2y + 6z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3y = -9z + 3 \\ x = -y + 3z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 3z \\ x = -(-1 + 3z) + 3z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}. \end{aligned}$$

Les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite D dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4) Soit $M(-2, -1 + 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de D.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(-2) - (-1 + 3t) + 2(t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand $t = -1$, on obtient le point de coordonnées $(-2, -4, -1)$ et on a montré que

la droite D et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées $(-2, -4, -1)$.