

EXERCICE 3

PARTIE A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = x$ est $\mathcal{S} = \{0\}$.

2) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $f'(x) \geq 0$ et donc la fonction f est croissante sur $[0, 1]$.

Soit alors x un réel. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, 1]$,

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 - \ln 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ car } 1 - \ln 2 = 0,3 \dots$$

Pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x)$ appartient à $[0, 1]$.

PARTIE B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0, 1]$.

- Puisque $u_0 = 1$, on a $u_0 \in [0, 1]$ et donc l'encadrement est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \in [0, 1]$. Alors, d'après la question 2) de la partie A, $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$.

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n , $u_n \in [0, 1]$.

2) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - \ln(u_n^2 + 1)) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1).$$

Or, $u_n^2 + 1 \geq 1$ et donc $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$ puis $-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$ et donc

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite. Puisque pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $0 \leq \ell \leq 1$.

Puisque pour tout entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $\ell = f(\ell)$ (par continuité de la fonction f sur $[0, 1]$ et donc en ℓ).

Ainsi, le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$. D'après la question 1) de la partie A, on a donc $\ell = 0$.

La suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.