# France métropolitaine 2011. Enseignement spécifique

**EXERCICE 3 (7 points)** (commun à tous les candidats)

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on désigne par $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

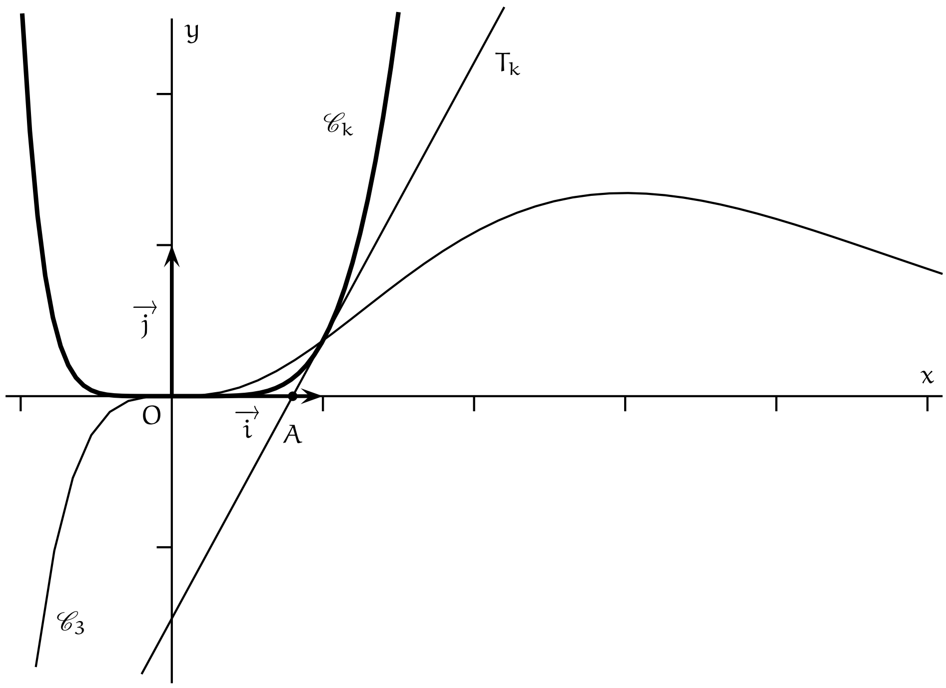
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

**PARTIE A**

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où $k$ est un entier naturel non nul, sa tangente $T_k$ au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$.




**1) a)** Déterminer les limites de la fonction $f_1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**b)** Étudier les variations de la fonction $f_1$ et dresser le tableau de variations de $f_1$.

**c)** A l'aide du graphique, justifier que $k$ est un entier supérieur ou égal à 2.

**2) a)** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

**b)** Vérifier que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, et pour tout réel $x$,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n - x)e^{-x}.$$

**3)** Sur le graphique, la fonction $f_3$ semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

**4) a)** Démontrer que la droite $T_k$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}, 0\right)$.

**b)** En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier $k$.

**PARTIE B**

On désigne par $(I_n)$ la suite définie pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx.$$

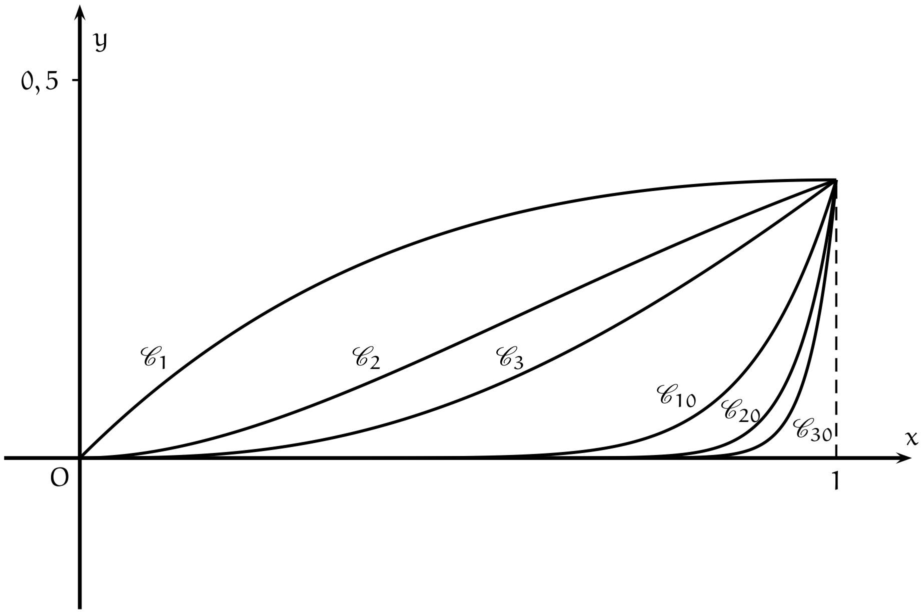
 

**1) a)** Montrer que pour tout réel $x$ de $[0, 1]$, $f_1(x) = e^{-x} - f_1'(x)$.

**b)** En déduire $I_1$.

**2)** *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.




**a)** Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite $(I_n)$ en décrivant sa démarche.

**b)** Démontrer cette conjecture.

**c)** En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente.

**d)** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.