# France métropolitaine 2011. Enseignement spécifique

**EXERCICE 2 : corrigé**

**1. Réponse 3**

**2. Réponse 4**

**3. Réponse 1**

**4. Réponse 3**

**Explication 1.** Les points A, D et E ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, -1)$ et $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

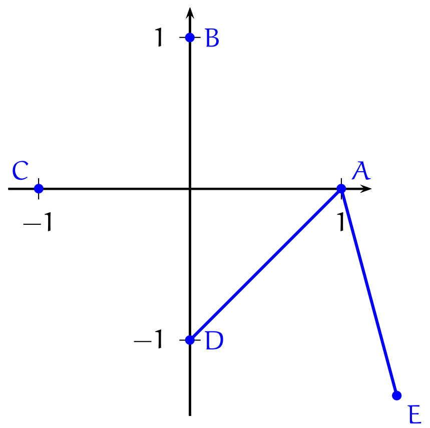
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ont pour coordonnées respectives $(-1, -1)$ et $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

- $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = (-1)\times\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + (-1)\times\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2} = 1.$
- $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$
- $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{2}.$

Par suite,

$$\cos\left(\widehat{DAE}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

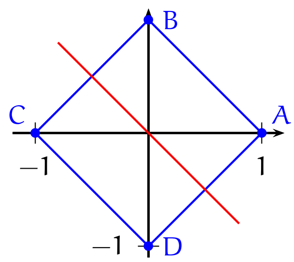
On en déduit que $\widehat{DAE} = \dfrac{\pi}{3}$. La bonne réponse est la troisième.




**Explication 2.** Soit M un point du plan dont l'affixe est notée $z$.

$$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow MD = MA \Leftrightarrow M \in \text{med}[AD].$$

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AD]. La bonne réponse est la quatrième.




**Explication 3.** On note $(E)$ l'ensemble des points M d'affixe $z$ telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un réel.
Soit M un point du plan distinct de C dont l'affixe est notée $z$.
On pose $z = x + iy$ où $x$ et $y$ sont deux réels. Pour tout $z \neq -1$,

$$\begin{aligned}\frac{z+i}{z+1} &= \frac{x+iy+i}{x+iy+1} = \frac{x+i(y+1)}{(x+1)+iy} = \frac{(x+i(y+1))((x+1)-iy)}{((x+1)+iy)((x+1)-iy)}\\ &= \frac{x(x+1)-ixy+i(x+1)(y+1)+y(y+1)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x(x+1)+y(y+1)}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}M \in (E) &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z+1} \text{ réel} \Leftrightarrow \text{Im}\left(\frac{z+i}{z+1}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x+y+1 = 0 \text{ et } z \neq -1.\end{aligned}$$

Ensuite, le point $C$ appartient à la droite d'équation $x+y+1=0$ car $x_C+y_C+1 = -1+0+1 = 0$.
$(E)$ est donc la droite d'équation $x+y+1=0$ privée du point $C$.

Enfin, $x_D+y_D+1 = 0-1+1 = 0$ et donc le point $D$ appartient aussi à la droite d'équation $x+y+1=0$. Cette droite est donc la droite $(CD)$ et finalement $(E)$ est la droite $(CD)$ privée du point $C$.

La bonne réponse est la première.

**Explication 4.** On note $(E)$ l'ensemble considéré. Le point $B$ d'affixe $i$ n'appartient pas à $(E)$ car $0$ n'a pas d'argument. Soit $M$ un point du plan d'affixe $z \neq i$.

$$\begin{aligned}M \in (E) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BD}\right)\ [2\pi]\\ &\Leftrightarrow \text{les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow M \in ]BD).\end{aligned}$$

Donc $(E)$ est la demi-droite d'origine $B$ passant par $D$ et privée du point $B$. La bonne réponse est la troisième.