Centres étrangers 2011. Enseignement spécifique

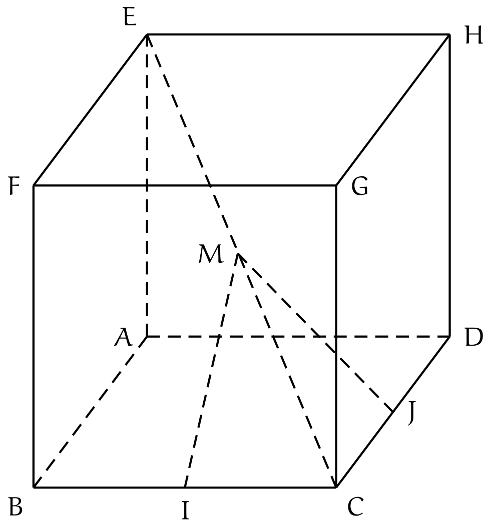
EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

La figure ci-contre représente un cube $\mathsf{ABCDEFGH}$ d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[\mathsf{BC}]$ et $[\mathsf{CD}]$.

Soit M un point quelconque du segment $[\mathsf{CE}]$.

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\mathsf{A}; \overrightarrow{\mathsf{AB}}, \overrightarrow{\mathsf{AD}}, \overrightarrow{\mathsf{AE}}\right)$.



1) a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t; 1-t; t)$ (on commencera par déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE)).

2) a) Exprimer IM^2 et JM^2 en fonction de t.

b) Que peut-on en déduire ?

3) Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[\mathsf{CE}]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\mathsf{IMJ}}$ est maximale.
On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathsf{IMJ}}$.

a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0;\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[\mathsf{EC}]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{\mathsf{IMJ}}$ soit maximale.

e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment $[\mathsf{EC}]$.

