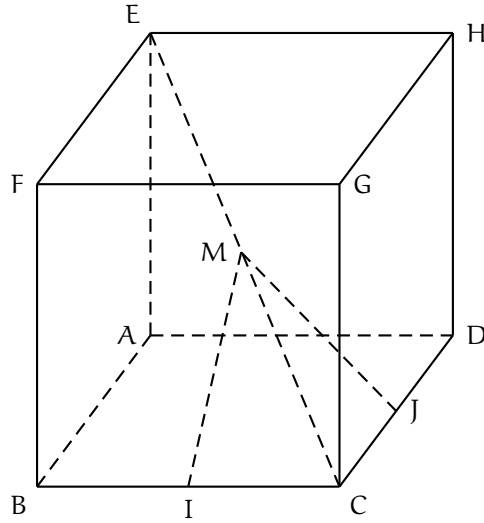


EXERCICE 3

1) a) Dans le repère,  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ , on a  $C(1, 1, 0)$ ,  $E(0, 0, 1)$ ,  $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$  et  $J\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ .



b) La droite (CE) est la droite passant par  $C(1, 1, 0)$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{CE}(-1, -1, 1)$ .  
Soit  $M(x, y, z)$  un point du plan.

$$M \in (CE) \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x - 1 = -t \\ y - 1 = -t \\ z - 0 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}.$$

De plus, le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}$  appartient au segment  $[CE]$  si et seulement si  $t \in [0, 1]$ . Donc,

il existe un réel  $t \in [0, 1]$  tel que les coordonnées de  $M$  soient  $(1 - t, 1 - t, t)$ .

2) a) Soit  $t$  un réel de  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} IM^2 &= ((1 - t) - 1)^2 + \left((1 - t) - \frac{1}{2}\right)^2 + (t - 0)^2 = t^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 + t^2 = t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2 + t^2 \\ &= 3t^2 - t + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

et

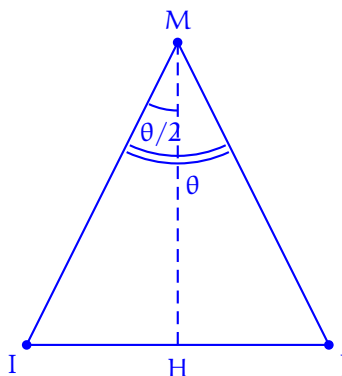
$$JM^2 = \left((1 - t) - \frac{1}{2}\right)^2 + ((1 - t) - 1)^2 + (t - 0)^2 = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 + t^2 + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

b) On en déduit que pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ ,  $IM = JM$  et donc

le triangle MIJ est isocèle en  $M$ .

3) a)  $\theta$  est maximal si et seulement si  $\frac{\theta}{2}$  est maximal. Puisque  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Maintenant, la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et donc  $\frac{\theta}{2}$  est maximal si et seulement si  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est maximal. En résumé,  $\theta$  est maximal si et seulement si  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est maximal.

b) Notons H le milieu du segment [IJ]. Puisque le triangle MIJ est isocèle en M d'après la question 2)b), la droite (MH) est aussi la hauteur issue de M du triangle MIJ. Ainsi, le triangle MHI est rectangle en H.



Dans ce triangle, on a

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\widehat{IMH}) = \frac{IH}{IM} = \frac{IJ}{2IM} = \frac{\sqrt{2}IC}{2IM} = \frac{\sqrt{2}}{4IM} = \frac{1}{2\sqrt{2}IM}.$$

Si IM est minimal, alors  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}IM}$  est maximal et si  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est maximal, alors  $IM = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$  est minimal. En résumé,

l'angle  $\widehat{IMJ}$  est maximal si et seulement si la distance IM est minimale.

c) La fonction f est dérivable sur  $[0, 1]$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$f'(t) = 6t - 1.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur  $\left[0, \frac{1}{6}\right]$  et strictement croissante sur  $\left[\frac{1}{6}, 1\right]$ .

d) D'après la question 2)c),  $f(t) = IM^2$ . D'après la question précédente,  $f(t)$  est minimal si et seulement si  $t = \frac{1}{6}$  ce qui correspond à une unique position  $M_0$  du point M sur le segment [CE].

Il existe une unique position  $M_0$  du point M sur le segment [CE] tel que  $\widehat{IMJ}$  soit maximal.

e) Le point  $M_0$  a pour coordonnées  $\left(1 - \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$  ou encore  $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$ . Par suite,

$$\overrightarrow{IM_0} \cdot \overrightarrow{EC} = \left(\frac{5}{6} - 1\right)(1 - 0) + \left(\frac{5}{6} - 1\right)(1 - 0) + \left(\frac{1}{6} - 0\right)(0 - 1) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

Donc le point  $M_0$  appartient au segment [EC] et la droite  $(IM_0)$  est perpendiculaire au segment [EC] ou encore

le point  $M_0$  est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].