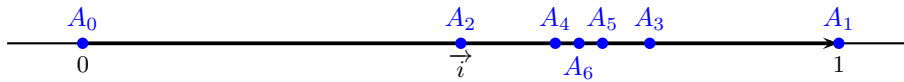


EXERCICE 1 : corrigé

1) a) Représentation graphique.



b) • $a_2 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$.
 • $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.
 • $a_4 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$.
 • $a_5 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right) = \frac{11}{16}$.
 • $a_6 = \frac{1}{2}(a_4 + a_5) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{11}{16}\right) = \frac{21}{32}$.

c) Si A et B sont deux points d'abscisses respectives a et b , l'abscisse du milieu du segment $[AB]$ est $\frac{a+b}{2}$. Donc, pour tout entier naturel n , $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.

- $-\frac{1}{2}a_0 + 1 = 1 = a_1$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$. Alors $-\frac{1}{2}a_n = a_{n+1} - 1$ puis $a_n = -2a_{n+1} + 2$. Par suite,

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{2}(a_{n+1} - 2a_{n+1} + 2) = \frac{1}{2}(-a_{n+1} + 2) = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1.$$

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + 1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - 2 \times \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

4) Puisque $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} + v_n\right) = \frac{2}{3}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$.