

Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, le point C a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point E a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont donc $(1, -1, 1)$.

La droite (EC) est la droite passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}$. Une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, F et H définissent un unique plan.

Déterminons un vecteur normal au plan (AFH). Soit $\vec{n}$ un vecteur de coordonnées (a, b, c) où a , b et c sont trois réels. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (AFH) si et seulement si $\vec{n}$ n'est pas nul et $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AFH) comme par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -c \end{cases}.$$

Donc un vecteur normal au plan (AFH) est par exemple le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1, -1, 1)$. Ainsi, le plan (AFH) est le plan passant par le point A de coordonnées $(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(1, -1, 1)$. Une équation de ce plan est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x - y + z = 1$.

Une équation du plan (AFH) est $x - y + z = 1$.

c) Soit $M(t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EC).

$$M \in (\text{AFH}) \Leftrightarrow t - (1 - t) + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Quand $t = \frac{2}{3}$, on obtient le point I de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IE}$ sont $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\vec{n}$. On en déduit que la droite (IE) est perpendiculaire au plan (AFH). Puisque d'autre part, le point I appartient au plan (AFH), on a montré que

le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d) La distance du point E au point I est

$$IE = \|\overrightarrow{IE}\| = \left\| \frac{1}{3}\vec{n} \right\| = \frac{1}{3} \|\vec{n}\| = \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$IE = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

e) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IH}$ sont $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$ sont $(0, 1, 1)$. Donc

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux ou encore, puisque les droites (HI) et (AF) sont coplanaires car contenues dans le plan (AFH), la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

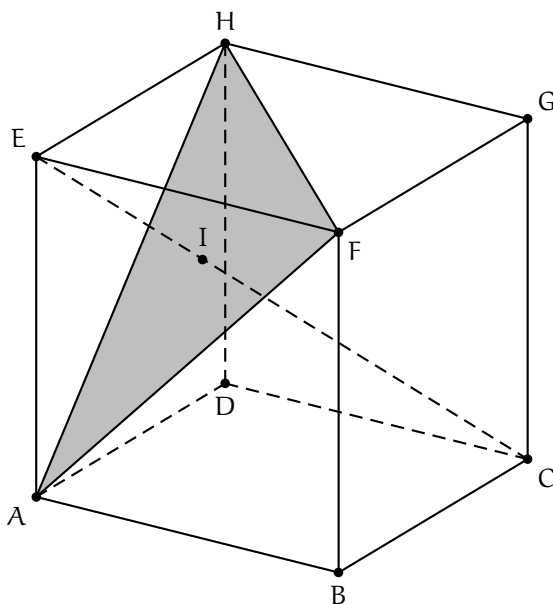
De même, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HF}$ sont $(1, 1, 0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AI}$ sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Donc

$$\vec{AI} \cdot \vec{HF} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = 0.$$

Donc les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{HF}$ sont orthogonaux ou encore la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (HF).

Ainsi, le point I appartient à deux des trois hauteurs du triangle AFH et donc

Le point I est l'orthocentre du triangle AFH.



2) Les trois faces AEF, AEH et FEH ont une aire égale à $\frac{1}{2}$ (moitié de l'aire d'un carré de côté de longueur 1). Calculons l'aire de la face AFH.

Puisque $AF = AH = HF$, le triangle AFH est équilatéral. D'après le théorème de PYTHAGORE, le côté de ce triangle équilatéral a pour longueur $a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. On sait que la hauteur de ce triangle a pour longueur $a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. L'aire de AFH est alors

$$\frac{1}{2} \times a \times a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'aire de la face AFH n'est donc pas égale à l'aire de la face AEH et le tétraèdre EAFH n'est ni de type 1, ni de type 3.

Ensuite, la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FEH) et est donc orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, l'arête [AE] est orthogonale à l'arête [HF].

De même, la droite (EH) est perpendiculaire au plan (AEF) et donc l'arête [EH] est orthogonale à l'arête [AF].

Enfin, la droite (EF) est perpendiculaire au plan (AEH) et donc l'arête [EF] est orthogonale à l'arête [AH].

En résumé, les arêtes opposées du tétraèdre EAFH sont deux à deux orthogonales et donc

le tétraèdre EAFH est de type 2.