Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1) Étude d'une fonction f. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

c) En déduire les variations de la fonction f.

2) Étude d'une fonction g. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

a) Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3) a) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

c) Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$.

4) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathscr{A}$.

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 1