Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Etude d'une fonction f.

a) Limite de f en 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$.

Limite de f en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.}$$

c) Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Or, pour $x > 0$, $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e^1 \Leftrightarrow x < e$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) et de même $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

2) Etude d'une fonction g.

a) Limite de g en 0. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = \lim\limits_{X\to-\infty} X^2 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 = +\infty$.

Limite de g en $+\infty$. Soit $x > 0$.

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ et donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

b) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{(\ln x)(2 - \ln x)}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ g'(x) = \frac{(\ln x)(2 - \ln x)}{x^2}.}$$

c) Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$ sur $]0, +\infty[$.
Le signe de $\ln x$ est connu et d'autre part, comme à la question 1)a), pour $x > 0$, $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e^2$ et $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$. On en déduit le signe de $(\ln x)(2 - \ln x)$ suivant les valeurs de x :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$2 - \ln x$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
$(\ln x)(2 - \ln x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0

3) a) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} \Leftrightarrow \ln x = (\ln x)^2 \text{ (car } \frac{1}{x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e. \end{aligned}$$

Comme $f(1) = 0$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont exactement deux points communs à savoir les points de coordonnées $(1, 0)$ et $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

b) La position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est donnée par le signe de $g(x) - f(x)$. Or pour $x > 0$,

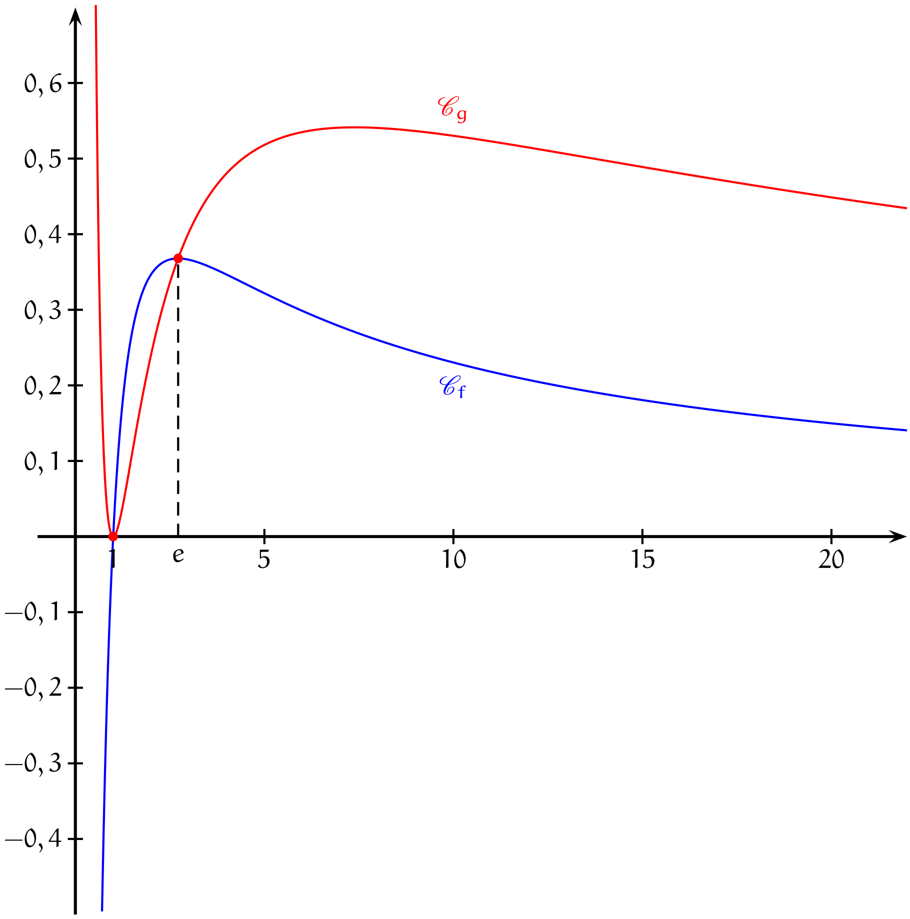
$$g(x) - f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)(\ln x - 1)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g(x) - f(x)$ est du signe de $(\ln x)(\ln x - 1)$ qui est donné dans le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$	$\|\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x)(\ln x - 1)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0, 1[$ et sur $]e, +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1, e[$ et on retrouve le fait que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses 1 et e.

c) Graphique.

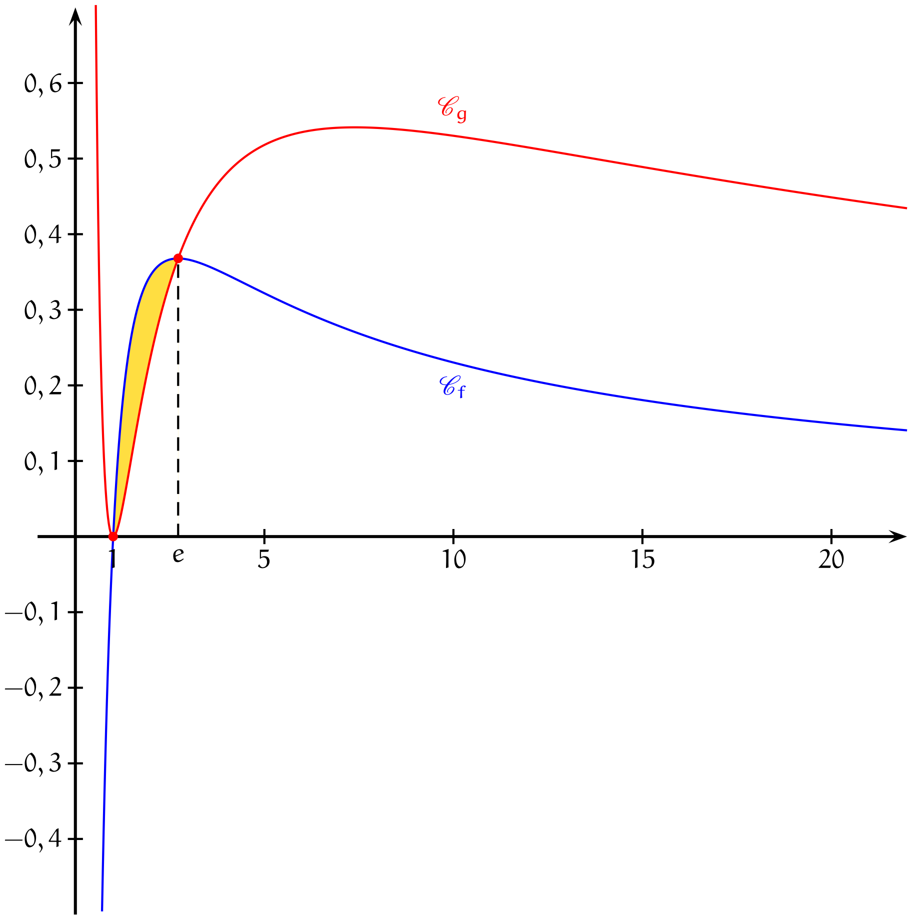


4) Les fonction f et g sont continues sur $[1, e]$ et de plus, pour tout réel x de $[1, e]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$. Donc

$$\mathscr{A} = \int_1^e f(x) - \int_1^e g(x)\ dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x\ dx - \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^2\ dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(\ln e)^3}{3} - \frac{(\ln 1)^3}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{6} \text{ unité d'aire.}}$$



0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
−0,1
−0,2
−0,3
−0,4
1
e
5
10
15
20
$\mathscr{C}_g$
$\mathscr{C}_f$

