

Antilles Guyane 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Un vecteur directeur de D' est le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-1, 1, -1)$.

Un vecteur directeur de Δ est un vecteur orthogonal aux droites D et D' ou encore aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1 ère solution. Soit $\vec{w}(a, b, c)$ un vecteur directeur de la droite Δ (en particulier $\vec{w} \neq \vec{0}$).

Δ est perpendiculaire à D et à D' et donc $\vec{w}(a, b, c)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Or,

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = b \\ b - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ sont donc de la forme $(a, 0, -a)$. En particulier, on a nécessairement $\vec{w}' = a\vec{w}$.

Ainsi, Δ est nécessairement dirigée par $\vec{w}$. Puisqu'on admet l'existence de Δ , on a montré que

un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{w}(1, 0, -1)$.

2 ème solution.

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 0 \times (-3) + (-1) \times 1 = 1 - 1 = 0,$$

et

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times (-1) = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, $\vec{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En admettant que tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirige nécessairement Δ , on a montré que

$\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ .

2) a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P . Or

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 1 + 2 \times (-3) + 3 \times 1 = 3 - 6 + 3 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{w} = 3 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Comme le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P , le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P .

b) Le plan P est le plan contenant le point $A(3, -4, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, 2, 3)$. Une équation cartésienne de P est donc $3(x - 3) + 2(y + 4) + 3(z - 1) = 0$ ou encore $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

Une équation cartésienne de P est $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

3) a) H' est un point de D' . Donc il existe un réel t tel que les coordonnées de H' soient $(-1 - t, 2 + t, 1 - t)$. Ensuite,

$$H' \in P \Leftrightarrow 3(-1 - t) + 2(2 + t) + 3(1 - t) - 4 = 0 \Leftrightarrow -4t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Quand $t = 0$, on obtient les coordonnées du point H' à savoir $(-1, 2, 1)$.

Le point H' a pour coordonnées $(-1, 2, 1)$.

b) Δ est la droite passant par $H'(-1, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(1, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4) a) H est un point de Δ . Donc il existe un réel t tel que les coordonnées de H soient $(-1+t, 2, 1-t)$. Le point H est aussi sur D et donc le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$ sont $(-4+t, 6, -t)$. Ensuite,

$\overrightarrow{AH}$ colinéaire à $\overrightarrow{u} \Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{u}$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} -4+t = k \\ 6 = -3k \\ -t = k \end{cases} \Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} k = -2 \\ -4+t = -2 \\ -t = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} k = -2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Quand $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H à savoir $(1, 2, -1)$.

Le point H a pour coordonnées $(1, 2, -1)$.

b) $HH' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$HH' = 2\sqrt{2}.$

5) a) Soient M un point de D et M' un point de D'.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{HH'} + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}).$$

De plus, $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur de Δ et $\overrightarrow{MH}$ est un vecteur de D. Donc $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$. De même, $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M'} = 0$ et finalement

$$\overrightarrow{HH'} \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}) = \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M'} = 0 + 0 = 0.$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{HH'}$.

b) Soient M un point de D et M' un point de D'.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{MM'}\|^2 &= \left(\overrightarrow{HH'} + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}) \right)^2 = \|\overrightarrow{HH'}\|^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}) + \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{HH'}\|^2 + \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\|^2 \\ &\geq \|\overrightarrow{HH'}\|^2, \end{aligned}$$

puis $MM'^2 \geq HH'^2$ et donc $MM' \geq HH'$.

Pour tout point M de D et tout point M' de D', $MM' \geq HH'$.