Devoir surveillé n°9

Exercice 1 – 6 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 6$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de (v_n).
2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.
3) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 2 – 8 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1)

   a. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

Etudier le sens de variation de f.
La courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est donnée ci-contre.

   b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{\imath})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2)

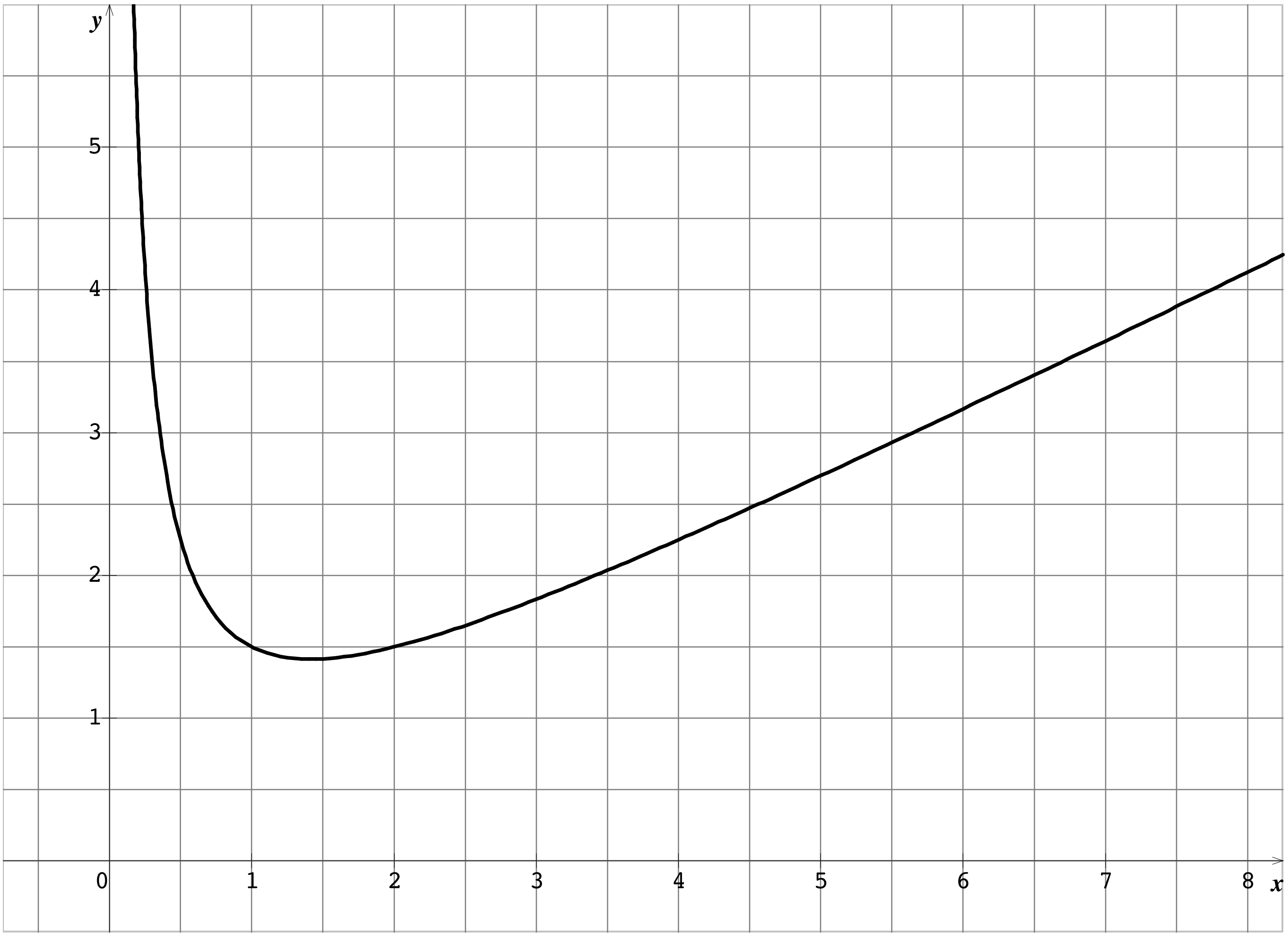
   a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \sqrt{2}$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
   c. Prouver qu'elle converge.
   d. Soit l la limite de la suite (u_n). Déterminer l.

Exercice 3 – 6 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$; $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

1) Démontrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < v_n < u_n$.
2) Etudier les variations des suites (u_n) et (v_n).
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
4) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.


y
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x