

Correction devoir surveillé n°9

Exercice 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 = \frac{1}{3}v_n + 2 - 2 = \frac{1}{3}v_n$$

Ceci montre que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -5$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $u_n = v_n + 6$ donc $u_n = 6 - 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a que la limite de (v_n) est nulle. Comme $u_n = v_n + 6$, on peut donc dire que (u_n) est convergente vers 6.

Exercice 2

1) $f: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

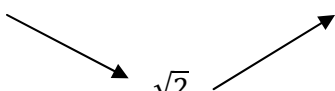
f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et

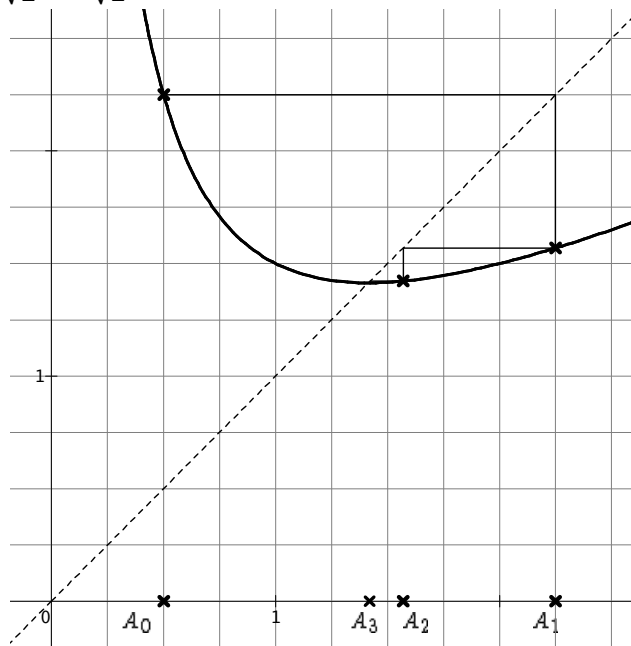
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

Le dénominateur est strictement positif donc

f' est du signe de $x^2 - 2$ qui s'annule en $\sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2+2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			



2)

a. Montrons par récurrence sur n non nul que $u_n \geq \sqrt{2}$.

Initialisation : montrons que la propriété est vraie au rang 1, c'est-à-dire que $u_1 \geq \sqrt{2}$. Or $u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2 \times 2\right) = \frac{9}{4}$ donc $u_1 \geq \sqrt{2}$.

Hérédité : on suppose que la formule est vraie pour un rang n non nul, c'est-à-dire que $u_n \geq \sqrt{2}$ et on veut montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

Or $u_n \geq \sqrt{2}$, et f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ donc $f(u_n) \geq f(\sqrt{2})$ soit $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n non nul.

b. Montrons par récurrence sur n que $u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \geq 1$.

Initialisation : $u_1 = \frac{9}{4}$ et $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + 2 \times \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{81}{36} + \frac{32}{36}\right) = \frac{113}{72}$ donc $u_2 < u_1$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$. On veut montrer $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ or

$u_{n+1} \leq u_n$ donc $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ car f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

c. Pour $n \geq 1$, (u_n) est une suite décroissante et minorée par $\sqrt{2}$ donc elle converge.

3) On note l la limite de (u_n) . Comme f est continue sur $]0; +\infty[$ car dérivable, en passant à la limite :

$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{2}{l} \right)$. Résolvons cette équation dans $]0; +\infty[$.

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \Leftrightarrow 2x = \frac{x^2 + 2}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Or $u_n \geq \sqrt{2}$ donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 3

1) On va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété $P_n : 0 < v_n < u_n$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $0 < v_0 < u_0$ or $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ donc c'est évident.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $0 < v_n < u_n$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $0 < v_{n+1} < u_{n+1}$

Or $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ donc $v_{n+1} > 0$.

De plus $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} > 0$ ce qui montre que $v_{n+1} < u_{n+1}$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < u_n$.

2) Pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$ d'après la question précédente.

Donc (u_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{v_n} \times (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})$ or $\sqrt{v_n} > 0$ et $\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} > 0$ car $u_n > v_n$

donc (v_n) est croissante.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} - \frac{1}{2}(u_n - v_n) &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} - \frac{u_n - v_n}{2} = \frac{u_n + v_n - u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = v_n - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \sqrt{v_n} \times (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \text{ or } \sqrt{v_n} > 0 \text{ et } \sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < 0 \text{ car } v_n < u_n. \text{ Donc on a bien} \\ u_{n+1} - v_{n+1} - \frac{1}{2}(u_n - v_n) &< 0 \text{ et donc } u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n) \end{aligned}$$

4) On considère la suite $w_n = u_n - v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n$.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $P_n : w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $w_0 \leq 1$ or $w_0 = u_0 - v_0 = 2 - 1 = 1$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $w_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Or $w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $w_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc nulle.

Comme $0 < w_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, d'après le théorème des gendarmes, (w_n) converge vers 0.

Ceci montre que la limite de $(u_n - v_n)$ est nulle. De plus, (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante. Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.