Lycée Saint-Exupéry

BAC BLANC mai 2011 - Terminales S

Epreuve de Mathématiques - Durée : 4 heures.

La qualité et la précision de votre rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points) pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Partie 1: restitution organisée des connaissances

1) Pré-requis: on rappelle les résultats suivants

- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

Montrer que pour tous réels strictement positifs a et x, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

2) Utiliser le résultat précédent pour montrer que pour tout réel strictement positif a et tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Partie 2

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 0,75 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors:

A: $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$ C: $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$
B: $z^{14} = 64 - 64i$. D: $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$.

2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-3| = |3-4i|$.

A: E est la médiatrice du segment [ST].
B: E est la droite (ST).
C: E est le cercle de centre K, d'affixe $3-4i$, et de rayon 3.
D: E est le cercle de centre S et de rayon 5.

3) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que:

A: $z = \frac{b - ia}{1 - i}$. C: $a - z = i(b - z)$.
B: $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$. D: $b - z = \frac{\pi}{2}(a - z)$.

4) L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

A: $x \mapsto ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$. C: $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$.

B: $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$. D: $x \mapsto ke^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 (5 points) **pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

Cet exercice est **A RENDRE SUR UNE FEUILLE A PART.** *Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.*

Partie A : restitution organisée des connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

- La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;
- La transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;
- Une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et *s* et *s'* deux similitudes du plan telles que $s(A) = s'(A)$, $s(B) = s'(B)$ et $s(C) = s'(C)$. Montrer que $s=s'$.

Partie B : *Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Le point A a pour affixe $2-i$ et B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu du segment [AB].

Proposition 1 : "La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z'=(1+i)z-1-2i$."

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on note *S* la surface d'équation $z=x^2+2x+y^2+1$

Proposition 2 : "La section de *S* avec le plan d'équation $z=5$ est un cercle de centre A de coordonnées (-1 , 0 , 5) et de rayon 5'".

3. *Proposition 3 :* " $5^{750}-1$ est un multiple de 7".

4. *Proposition 4 :* "Si un entier naturel *n* est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7".

Exercice 2 (5 points) **commun à tous les élèves**

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.

On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement: " la société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur " et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n.

Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée:

- $p_1 = p(I_1) = 0{,}75$
- Sachant qu'il y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0{,}04$.
- Sachant qu'il n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à 0,64.

On rappelle que $\overline{A}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_B(A)$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Partie 1

1) Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$ puis calculer $p(I_n \cap I_{n+1})$ et $p(\overline{I_n} \cap I_{n+1})$ en fonction de p_n où n est un entier naturel non nul.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -0{,}6p_n + 0{,}64$.
3) On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0{,}4$.
    a. Montrer que (q_n) est une suite géométrique.
    b. En déduire l'expression de q_n puis de p_n en fonction de n.
    c. Donner l'arrondi à 10^{-3} près de p_6.

Partie 2

Un même mois, la société de maintenance installe un photocopieur dans m entreprises où m est un entier naturel non nul. On estime que la probabilité d'intervention du service de maintenance durant le sixième mois auprès de chacune de ces entreprises est égale à 0,373.

1) Calculer, en fonction de m, la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant le 6$^{\text{ième}}$ mois (on supposera que les interventions dans les différentes entreprises sont des évènements indépendants).
2) Calculer le plus petit entier m pour que la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant le 6$^{\text{ième}}$ mois soit supérieure ou égale à 0,99.

<u>Exercice 3</u> (5 points) **commun à tous les élèves**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie A – Etude de la fonction f et construction de la courbe C_f.

1) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$) .
2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C_f en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C_f par rapport à Δ.
3)
    a. Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.
    b. Dresser le tableau de variations de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
    c. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x.
    d. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4) Soit I l'intervalle$[1; +\infty[$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
5) Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de α.
6) Tracer la droite Δ et la courbe C_f (unité graphique : 2 cm).

Partie B – Calcul d'aire

1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^\alpha xe^{x-1}dx$.
2)
    a. Déterminer en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.
    b. Démontrer qu'on peut écrire $\mathcal{A} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

<u>Exercice 4</u> (5 points) **commun à tous les élèves**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points *A* et *B* de coordonnées respectives $(1\,;3\,;4)$ et $(2\,;2\,;0)$.

1°) a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle.

b. Justifier que les points *O, A* et *B* définissent un plan que l'on notera P_1.

c. Prouver que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;-2\,;1)$ est normal au plan P_1.

d. En déduire une équation cartésienne de P_1.

2°) a. Vérifier que le plan P_2 d'équation cartésienne $x+3y+4z-13=0$ est le plan médiateur du segment $[OA]$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan P_3 médiateur du segment $[OB]$.

3°) a. Prouver que l'intersection des plans P_2 et P_3 est une droite que l'on notera Δ. On ne demande pas de déterminer Δ.

b. Quelle est la caractéristique géométrique des points de Δ?

c. Que représente le point d'intersection *H* des plans P_1, P_2 et P_3 pour le triangle OAB?

d. En déduire les coordonnées de *H*.

4°) On considère le point *S* de coordonnées $\left(\frac{9}{2}\,;-\frac{5}{2}\,;4\right)$.

a. Justifier que *S* appartient à Δ.

b. Déterminer le volume du tétraèdre $SOAB$.