

Bac Blanc mai 2011 - Correction

Exercice 1 - pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (10 points)

Partie 1 : restitution organisée de connaissances

Voir cours

Partie 2

$$1) \quad z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ donc } z^{14} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{14} = (\sqrt{2})^{14} \times e^{\frac{14i\pi}{3}} = 128e^{\frac{2i\pi}{3}} = 128\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -64 + 64i\sqrt{3} \text{ donc } \boxed{C}$$

$$2) \quad M \in E \Leftrightarrow |z - 3| = |3 - 4i| \Leftrightarrow |z - z_S| = |z_S - z_T| \Leftrightarrow MS = ST \Leftrightarrow MS = 5$$

Donc E est le cercle de centre S et de rayon 5. $\boxed{D}$

$$3) \quad MAB \text{ rectangle isocèle direct en } M \Leftrightarrow B = r(A) \text{ où } r \text{ est la rotation de centre } M \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.$$

$$\Leftrightarrow b - z = e^{\frac{i\pi}{2}}(a - z) \Leftrightarrow b - z = i(a - z) \Leftrightarrow b - z = ia - iz \Leftrightarrow (i - 1)z = ia - b \Leftrightarrow z = \frac{b - ia}{1 - i} \quad \boxed{A}$$

$$4) \quad \text{L'équation différentielle } y = 2y' - 1 \text{ est équivalent à } y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \text{ donc de la forme } y' = ay + b \text{ avec } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}. \text{ Les solutions sont donc les fonctions } f_k: x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ donc } f_k: x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1 \quad \boxed{C}$$

Exercice 1 - pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité (10 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances.

Voir cours.

Partie B :

$$1) \quad A(2-i) \text{ et } B \text{ est l'image de } A \text{ dans la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}. \text{ Donc } z_B = i \times z_A = 1 + 2i.$$

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \text{ donc } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}.$$

$$\frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + i}{-\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}} = \frac{-4 + 2i}{-1 + 3i} = \frac{(-4 + 2i)(-1 - 3i)}{1 + 9} = \frac{4 + 12i - 2i + 6}{10} = 1 + i$$

$$\text{Donc } \frac{AO}{AB} = |1 + i| = \sqrt{2} \text{ et } (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AO}) = \arg\left(\frac{z_O - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$

D'où la similitude a pour écriture complexe : $z' - z_A = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}(z - z_A)$ soit $z' - 2 + i = (1 + i)(z - 2 + i)$ ce qui après développement et réduction donne : $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$ **Proposition 1 VRAIE.**

2)

$$M(x; y; z) \in S \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + 2x + y^2 + 1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = x^2 + 2x + y^2 + 1 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 5 \\ z = 5 \end{cases}$$

$S \cap P$ est donc le cercle de centre $I(-1; 0; 5)$ et de rayon $\sqrt{5}$ contenu dans le plan d'équation $z = 5$.

Proposition 2 FAUSSE.

$$3) \quad 750 = 2 \times 3 \times 5^3 \text{ donc } 5^{750} = 5^{2 \times 3 \times 5^3} = (5^{5^3})^6 = (5^{5^3})^{7-1}$$

7 est premier et 7 est premier avec 5^{5^3} (produit de 5^3 facteurs égaux à 5)

$$\text{Donc d'après le petit théorème de Fermat, } (5^{5^3})^{7-1} \equiv 1[7] \text{ soit } 7 \text{ divise } 5^{750} - 1 \quad \textbf{Proposition 3 VRAIE}$$

Variante :

7 est premier et 7 est premier avec 5. Donc d'après le petit théorème de Fermat, $5^{7-1} \equiv 1[7]$ soit $5^6 \equiv 1[7]$ d'où $(5^6)^{125} \equiv 1^{125}[7] \equiv 1[7]$ soit $5^{750} \equiv 1[7]$

$$4) \quad 4n + 3 = 3n + 4 + n - 1 \text{ donc } PGCD(4n + 3; 3n + 4) = PGCD(3n + 4; n - 1)$$

$$3n + 4 = 3 \times (n - 1) + 7 \text{ donc } PGCD(3n + 4; n - 1) = PGCD(n - 1; 7)$$

Or $n \not\equiv 1[7]$ donc 7 divise $n - 1$. D'où $PGCD(n - 1; 7) = 7$

Finalement si $n \not\equiv 1[7]$ alors $PGCD(4n + 3; 3n + 4) = 7$ **Proposition 4 VRAIE**

Exercice 2 (10 points)

Partie 1

1) $p_{I_n}(I_{n+1}) = 0,04$ et $p_{\bar{I}_n}(I_{n+1}) = 0,64$ d'après l'énoncé. (0,5+0,5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p(I_{n+1} \cap I_n) = p_{I_n}(I_{n+1}) \times p(I_n) = 0,04p_n$ (0,75)

$p(I_{n+1} \cap \bar{I}_n) = p_{\bar{I}_n}(I_{n+1}) \times p(\bar{I}_n) = 0,64(1 - p_n)$ (0,75)

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = p(I_{n+1}) = p(I_{n+1} \cap I_n) + p(I_{n+1} \cap \bar{I}_n) = 0,04p_n + 0,64(1 - p_n) = -0,6p_n + 0,64 \quad (1)$$

3)

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} = p_{n+1} - 0,4 = -0,6p_n + 0,64 - 0,4 = -0,6(q_n + 0,4) + 0,24 = -0,6q_n$

Donc (q_n) est une suite géométrique de raison $-0,6$ et de premier terme $q_1 = p_1 - 0,4 = 0,75 - 0,4 = 0,35$. (1)

b. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = q_1 \times (-0,6)^{n-1} = 0,35 \times (-0,6)^{n-1}$ et

$$p_n = q_n + 0,4 = 0,35 \times (-0,6)^{n-1} + 0,4 \quad (0,5+0,5)$$

$$c. p_6 = 0,35 \times (-0,6)^5 + 0,4 \approx 0,373. \quad (0,5)$$

Partie 2

1) $p(\text{"au moins un déplacement"}) = 1 - p(\text{"aucun déplacement"}) = 1 - (1 - 0,373)^m = 1 - 0,627^m$

car les interventions sont des événements indépendants. (1,5)

2) $p(\text{"au moins un déplacement"}) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,627^m \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq 0,627^m$

$\Leftrightarrow \ln(0,01) \geq \ln(0,627^m)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0,01) \geq m \ln(0,627)$ sont d $\Leftrightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,627)} \leq m$ car $\ln(0,627)$ est négatif

$\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,627)} \approx 9,87$ donc le plus petit entier m est 10. (2,5)

Exercice 3 (10 points)

Partie A

1) En $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{e} = 0 \text{ donc par soustraction } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty} \quad (0,5)$$

$$\text{En } +\infty : f(x) = e^x \left(\frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e} = -\infty \text{ donc par addition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty} \quad (0,5)$$

2) Pour tout réel x , $f(x) - (2x + 1) = -x e^{x-1}$ et d'après ce qui précède

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x-1} = 0 \text{ donc, } \Delta \text{ est asymptote à } C_f \text{ en } -\infty \quad (0,5)$$

De plus, e^{x-1} est strictement positif car la fonction exponentielle l'est donc $f(x) - (2x + 1)$ est du signe de $-x$.

Autrement dit, sur $]-\infty; 0]$, C_f est au dessus de Δ et sur $[0; +\infty[$, C_f est en dessous de Δ . (0,5)

3)

a. f est une somme d'une fonction affine et du produit entre une fonction affine et une composée de la fonction exponentielle et d'une fonction affine donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2 - e^{x-1} - x e^{x-1} \quad (0,25 \text{ dérivabilité } +0,25)$$

De la même manière, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f''(x) = -e^{x-1} - e^{x-1} - x e^{x-1} = -e^{x-1}(x + 2) \quad (0,5)$$

b. Limite de f' en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{x-1} = 0 \text{ (voir la question 1) donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 2} \quad (0,5 \text{ limite } + 0,5 \text{ tableau})$$

e^{x-1} est positif donc $f''(x)$ est du signe contraire de $x + 2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f'	2	$2 + e^{-3}$	

c. $f'(1) = 2 - 1 - 1 = \boxed{0}$

A l'aide du tableau de variations de f' , on en déduit que f' est positive sur $]-\infty; 1]$ et négative sur $[1; +\infty[$. (0,5)

d. (0,5)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	$-\infty$	2	$-\infty$

4) Sur I , f est continue car dérivable, strictement décroissante et 0 est bien compris entre $f(1) = 2$ et $f(2) \approx -0,44$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur I . (0,75)

5) $f(1,9) \approx 0,13$ et $f(2) \approx -0,44$ donc $1,9 < \alpha < 2$
 $f(1,92) \approx 0,02$ et $f(1,93) \approx -0,03$ donc

$\boxed{1,92 < \alpha < 1,93}$ (0,25)

6) Voir le repère. (0,5+0,5)

Partie B

1) $I = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$: on considère deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{x-1}$ alors $u'(x) = 1$ et on peut choisir $v(x) = e^{x-1}$. En intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} I &= [u(x)v(x)]_1^\alpha - \int_1^\alpha u'(x)v(x)dx \\ &= [x e^{x-1}]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^{x-1} dx \\ &= \alpha e^{\alpha-1} - 1 - [e^{x-1}]_1^\alpha \\ &= \alpha e^{\alpha-1} - 1 - (e^{\alpha-1} - 1) \end{aligned}$$

$\boxed{I = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}}$ (1)

2)

a. Sur $[1; \alpha]$, f est positive donc $\mathcal{A} = \int_1^\alpha f(x) dx$ u. a. :

$$\mathcal{A} = \int_1^\alpha (2x + 1 - x e^{x-1}) dx = \int_1^\alpha (2x + 1) dx - I = [x^2 + x]_1^\alpha - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

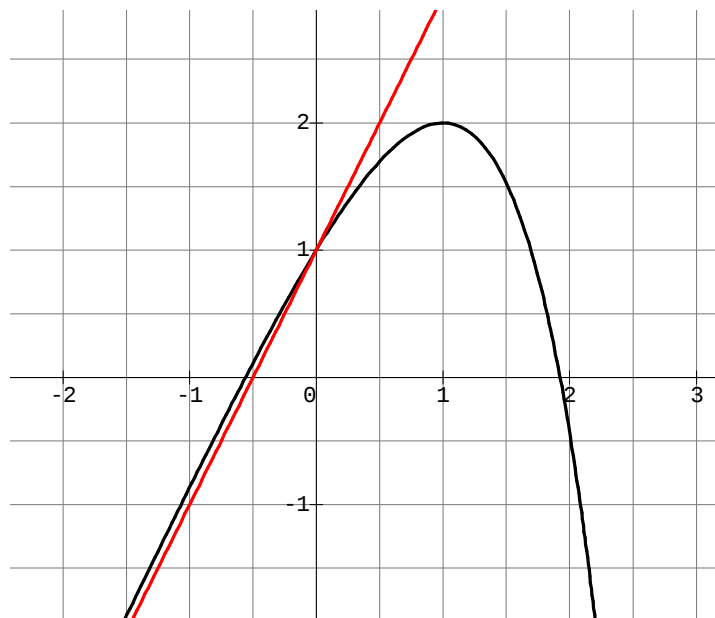
$\boxed{\mathcal{A} = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}}$ u. a. (1)

b. α est solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $2\alpha + 1 - \alpha e^{\alpha-1} = 0$ ou encore $e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$.

$$\mathcal{A} = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1) \times \frac{2\alpha+1}{\alpha} = (\alpha - 1)(\alpha + 2) - (\alpha - 1) \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

En utilisant la factorisation de $X^2 + X - 2$: $\Delta = 9$ donc $X_1 = -2$ et $X_2 = 1$ d'où $X^2 + X - 2 = (X + 2)(X - 1)$

$$\mathcal{A} = (\alpha - 1) \left(\alpha + 2 - 2 - \frac{1}{\alpha} \right) = \boxed{(\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)} \quad (1)$$



Exercice 4 (10 points)

1°) a. $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (1 ; 3 ; 4), $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées (2 ; 2 ; 0). et $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (1 ; -1 ; -4) donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times (-4) = 0$ donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc OAB est rectangle en B . (0,5)

b. $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc ils ne sont pas colinéaires donc O, A et B définissent bien un plan. (0,5)

c. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 2 + (-2) \times 2 + 1 \times 0 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB}$.

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times (-4) = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P_1 donc $\vec{n}$ est normal à P_1 . (0,5)

d. $\vec{n}$ est normal à P_1 donc P_1 admet une équation cartésienne de la forme $2x - 2y + z + d = 0$.

De plus $O \in P_1$ donc $2 \times 0 - 2 \times 0 + 0 + d = 0$ donc $d = 0$

d'où une équation cartésienne de P_1 : $2x - 2y + z = 0$ (0,5)

2°) a. Le milieu de $[OA]$ a pour coordonnées $\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+3}{2}; \frac{0+4}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$

et $\frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{2} + 4 \times 2 - 13 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 5 = 5 - 5 = 0$ donc P_2 contient le milieu de $[OA]$

De plus, le vecteur de coordonnées (1;3;4) normal à P_2 est le vecteur $\overrightarrow{OA}$ donc P_2 est orthogonal à $[OA]$

d'où P_2 est bien le plan médiateur de $[OA]$. (1)

b. P_3 admet $\overrightarrow{OB}$ pour vecteur normal donc il admet une équation cartésienne de la forme

$$2x + 2y + 0z + d = 0$$

De plus le milieu de $[OB]$ appartient à P_3

or il a pour coordonnées $\left(\frac{0+2}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$ soit (1;1;0) donc $2 \times 1 + 2 \times 1 + d = 0$ donc $d = -4$

d'où une équation de P_3 : $2x + 2y - 4 = 0$ ou plus simple $x + y - 2 = 0$ (1,5)

3°) a. Considérons les vecteurs $\vec{n}_2$ (1;3;4) normal à P_2 et $\vec{n}_3$ (1;1;0) normal à P_3

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires donc P_2 et P_3 ne sont pas parallèles donc ils sont sécants en une droite Δ . (1)

b. Les points de Δ sont aussi des points de P_2 plan médiateur de $[OA]$ donc ils sont équidistants de O et de A .

Ce sont également des points de P_3 plan médiateur de $[OB]$ donc ils sont équidistants de O et de B .

Les points de Δ sont donc équidistants des points O, A et B . (0,5)

c. D'après b., H est équidistant de O, A et B et, comme il est aussi dans $P_1 = (OAB)$ c'est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB rectangle en B donc H est le milieu de $[OA]$ (1)

d. Les coordonnées de H sont donc $\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+3}{2}; \frac{0+4}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ (0,5)

4°) a. $\frac{9}{2} + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 4 \times 4 - 13 = \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3 = -3 + 3 = 0$ donc $S \in P_2$ et $\frac{9}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) - 2 = 2 - 2 = 0$ donc $S \in P_3$ or $\Delta = P_2 \cap P_3$

donc $S \in \Delta$ (1)

b. Le volume de $SOAB$ est $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}(OAB) \times \text{hauteur issue de } S$

or $\text{aire}(OAB) = \frac{1}{2} \times OB \times AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{18} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$ et la hauteur issue de S

$$\text{est } d(S; P_1) = \frac{\left| 2 \times \frac{9}{2} - 2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 4 \right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|18|}{3} = 6$$

d'où $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 = 12$ (1,5)