

Correction devoir surveillé n°8 Sujet B

Exercice 1

- a. ABC est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \times 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 25 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{25}{2}}$
- b. Dans le triangle ABC , I est le milieu de $[AC]$ donc (BI) est la médiatrice de $[AC]$ et donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{0}$
- c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$
 $= -CA \times CD \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + CB \times CD \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -5 \times 5 \times \frac{1}{2} + 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \boxed{0}$
- d. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2 - \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA}$
 $= -AI \times AB \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 5^2 - BJ \times BA \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5}{2} \times 5 \times \frac{1}{2} + 25 - \frac{5}{2} \times 5 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{25}{2}}$

Exercice 2

- 1) $B(1; 3; 0); E(1; 0; 1); G(0; 3; 1); I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right); J\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right); K\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$
 2)

- a. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{-2}$
- b. $IJ = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ $IK = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- c. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = IJ \times IK \times \cos(\widehat{JIK})$ d'où $\cos(\widehat{JIK}) = \frac{-2}{\frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = -2 \times \frac{4}{10} = -\frac{4}{5}$ donc $\widehat{JIK} \approx 143,1^\circ$

3)

- a. En notant $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y + 3z - 3 = 0$:
 $3 + 0 - 3 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$; $3 + 0 - 3 = 0$ donc $C \in \mathcal{P}$; $0 + 3 - 3 = 0$ donc $E \in \mathcal{P}$.
 Finalement, le plan (BCE) a bien pour équation $y + 3z - 3 = 0$.

- b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = \boxed{0}$
- c. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ donc $BCHE$ est un parallélogramme. De plus, (BC) et (BE)

sont perpendiculaires donc $BCHE$ est un rectangle. Pour calculer son aire, nous avons besoin des longueurs des côtés : $BC = 1$ et $BE = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ donc $\mathcal{A} = BC \times BE = \boxed{\sqrt{10}}$

- d. $d(F; (BCE)) = \frac{|3+1 \times 3 - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BCHE} \times d(F; (BCE)) = \frac{1}{3} \sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \boxed{1}$$

Exercice 3

1)

- a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés et

définissent bien un plan.

- b. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 - 16 + 14 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires de (ABC) donc $\vec{n}$ est normal à (ABC) .

c. Comme $\vec{n}$ est normal à (ABC) , une équation de (ABC) est $x + 2y - 2z + d = 0$.
 $A \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC) : $-1 + 4 - 8 + d = 0$ donc $d = 5$.

Une équation de (ABC) est donc $\boxed{x + 2y - 2z + 5 = 0}$

2)

a. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Comme $\vec{n}_1$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{P}$ et (ABC) ne sont pas parallèles. Donc ils sont sécants.

b. $-1 + 4 + 1 - 4 = 0$ donc $D \in \mathcal{P}$ et $-1 - 2 - 2 + 5 = 0$ donc $D \in (ABC)$. Ceci montre que

$\boxed{D \in \mathcal{P} \cap (ABC)}$

c. $E(x; 0; z) \in \mathcal{P} \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z - 5 \\ 2z - 5 + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ donc $\boxed{E(1; 0; 3)}$

3)

a. $DH = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (1 + 1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$ donc $\boxed{D \in S}$

b. On cherche un point M appartenant à (DE) et à S .

Comme $M \in (DE)$, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DE}$ avec $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} x_M + 1 = 2k \\ y_M + 1 = k \\ z_M - 1 = 2k \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_M = 2k - 1 \\ y_M = k - 1 \\ z_M = 2k + 1 \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation de la sphère :

$$(2k - 1 + 2)^2 + (k - 1 - 1)^2 + (2k + 1 + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 + k^2 - 4k + 4 + 4k^2 + 8k + 4 = 9$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 8k = 0 \Leftrightarrow : \Delta = 64 \text{ donc } k_1 = 0 \text{ et } k_2 = -\frac{8}{9}$$

Pour la valeur $k_1 = 0$, on trouve le point de coordonnées $(-1; -1; 1)$, autrement dit le point D .

Pour $k_2 = -\frac{8}{9}$, on trouve le point $\boxed{M \left(-\frac{25}{9}; -\frac{17}{9}; -\frac{7}{9} \right)}$

La sphère S et la droite (DE) ont donc deux points d'intersection : D et M .