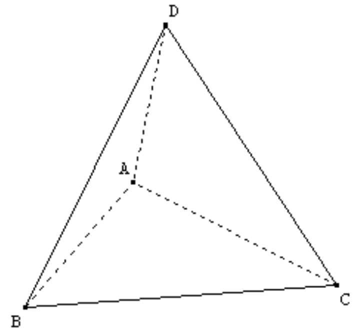
Devoir surveillé n°8   Sujet A

Exercice 1 – 4 points

On considère un tétraèdre réguler $ABCD$ dont toutes les arêtes ont pour longueur 3.
On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[CD]$.
Calculer en justifiant proprement.

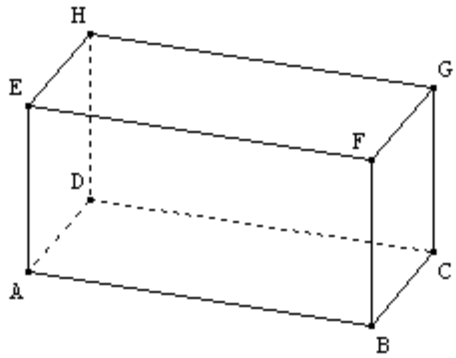


a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
b. $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}$
c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
d. $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$

Exercice 2 – 6 points

On considère un pavé $ABCDEFGH$ tel que $AD = AE = 1$ et $AB = 2$. On considère I, J et K les milieux respectifs de $[DE]$, $[DG]$ et $[EB]$.

On se place dans le repère $\left(D; \overrightarrow{DA}; \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH}\right)$



1) Donner les coordonnées de B, E, G, I, J et K.
2)
   a. Calculer $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$
   b. Calculer IJ et IK.
   c. En déduire une valeur approchée de $\widehat{JIK}$ au dixième de degré près.
3)
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $y + 2z - 2 = 0$.
   b. Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$
   c. Déterminer la nature de $BCHE$ et calculer son aire.
   d. Calculer la distance de F au plan (BCE).
   e. Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide $FBCHE$.

Exercice 3 : extrait de Antilles Guyane – septembre 2011 – 10 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.
On considère les trois points $A(-1; 2; 1)$; $B(1; -6; -1)$ et $C(2; 2; 2)$.

1)
   a. Vérifier que A, B et C définissent un plan.
   b. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2) On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z - 4 = 0$.
   a. Montrer que $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants.
   b. On considère le point $D(2; -1; 1)$. Démontrer que D appartient à l'intersection de $\mathcal{P}$ et (ABC).
   c. On considère le point E de côté 0 appartenant aussi à l'intersection de $\mathcal{P}$ et (ABC). Déterminer les coordonnées de E.
3) On considère la sphère S de centre $\mathrm{H}(3; 1; 3)$ et de rayon 3. On admet que E a pour coordonnées $(1; -3; 0)$
   a. Montrer que D appartient à S.
   b. Montrer que la droite (DE) coupe S en un deuxième point à déterminer.