

Exercice 1

- a. ABC est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3 \times 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$
- b. Dans le triangle ABC , I est le milieu de $[AB]$ donc (CI) est la médiane de $[AB]$ et donc $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AB} = \boxed{0}$
- c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$
 $= -CA \times CD \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + CB \times CD \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \times 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \boxed{0}$
- d. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{AB}$
 $= IA \times AB \times \cos(\pi) + AC \times AB \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \times 3 \times (-1) + 3 \times 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \boxed{0}$

Exercice 2

- 1) $B(1; 2; 0)$; $E(1; 0; 1)$; $G(0; 2; 1)$; $I\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$; $J\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$
- 2)

- a. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 + 0 = -\frac{1}{4} + 1 = \boxed{\frac{3}{4}}$
- b. $IJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ $IK = \sqrt{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$
- c. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = IJ \times IK \times \cos(\widehat{JIK})$ d'où $\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ donc $\widehat{JIK} \approx 53,1^\circ$

3)

- a. En notant $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y + 2z - 2 = 0$:
 $2 + 0 - 2 = 0$ donc $B \in \mathcal{P}$; $2 + 0 - 2 = 0$ donc $C \in \mathcal{P}$; $0 + 2 - 2 = 0$ donc $E \in \mathcal{P}$.
 Finalement, le plan (BCE) a bien pour équation $y + 2z - 2 = 0$.

- b. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = \boxed{0}$
- c. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ donc $BCHE$ est un parallélogramme. De plus, (BC) et (BE)

sont perpendiculaires donc $BCHE$ est un rectangle. Pour calculer son aire, nous avons besoin des longueurs des côtés : $BC = 1$ et $BE = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ donc $\mathcal{A} = BC \times BE = \boxed{\sqrt{5}}$

- d. $d(F; (BCE)) = \frac{|2+2-2|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BCE} \times d(F; (BCE)) = \frac{1}{3} \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Exercice 3

1)

- a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés et

définissent bien un plan.

- b. $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 - 8 + 6 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 3 + 0 - 3 = 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires de (ABC) donc $\vec{n}$ est normal à (ABC) .

c. Comme $\vec{n}$ est normal à (ABC) , une équation de (ABC) est $x + y - 3z + d = 0$.

$A \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC) : $-1 + 2 - 3 + d = 0$ donc $d = 2$.

Une équation de (ABC) est donc $\boxed{x + y - 3z + 2 = 0}$

2)

a. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Comme $\vec{n}_1$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{P}$ et (ABC) ne sont pas

parallèles. Donc ils sont sécants.

b. $2 + 1 + 1 - 4 = 0$ donc $D \in \mathcal{P}$ et $2 - 1 - 3 + 2 = 0$ donc $D \in (ABC)$. Ceci montre que

$\boxed{D \in \mathcal{P} \cap (ABC)}$

c. $E(x; y; 0) \in \mathcal{P} \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ donc $\boxed{E(1; -3; 0)}$

3)

a. $DH = \sqrt{(3-2)^2 + (1+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ donc $\boxed{D \in S}$

b. On cherche un point M appartenant à (DE) et à S .

Comme $M \in (DE)$, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{EM} = k\overrightarrow{ED}$ avec $\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} x_M - 1 = k \\ y_M + 3 = 2k \\ z_M = k \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_M = k + 1 \\ y_M = 2k - 3 \\ z_M = k \end{cases}$

En remplaçant dans l'équation de la sphère :

$$(k + 1 - 3)^2 + (2k - 3 - 1)^2 + (k - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 + 4k^2 - 16k + 16 + k^2 - 6k + 9 = 9$$

$$\Leftrightarrow 6k^2 - 26k + 20 = 0 \Leftrightarrow 3k^2 - 13k + 10 = 0 : \Delta = 49 \text{ donc } k_1 = \frac{13+7}{6} = \frac{10}{3} \text{ et } k_2 = \frac{13-7}{6} = 1$$

Pour la valeur $k_2 = 1$, on trouve le point de coordonnées $(2; -1; 1)$, autrement dit le point D .

Pour $k_1 = \frac{10}{3}$, on trouve le point $\boxed{M\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)}$

La sphère S et la droite (DE) ont donc deux points d'intersection : D et M .