

Correction devoir surveillé n°7

Exercice 1

$$1) \quad z_Q = z_B + z_{\vec{w}} = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}$$

$$2) \quad z_R = -\frac{1}{3}(z_P - z_C) + z_C = -\frac{1}{3}\left(3 + 2i + 3 + \frac{1}{4}i\right) - 3 - \frac{1}{4}i = -1 - \frac{2}{3}i - 1 - \frac{1}{12}i - 3 - \frac{1}{4}i = \boxed{-5 - i}$$

$$3) \quad z_S = e^{-\frac{i\pi}{2}}(z_P - z_A) + z_A = -i \times \left(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i\right) + \frac{3}{2} + 6i = -3i + 2 + \frac{3}{2}i - 6 + \frac{3}{2} + 6i = \boxed{-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i}$$

4)

$$5) \quad z_{\vec{PQ}} = z_Q - z_P = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i - 3 - 2i = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$$

$$z_{\vec{SR}} = z_R - z_S = -5 - i + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i \quad \text{donc } \vec{PQ} = \vec{SR} \text{ et } PQRS \text{ est bien un parallélogramme.}$$

6)

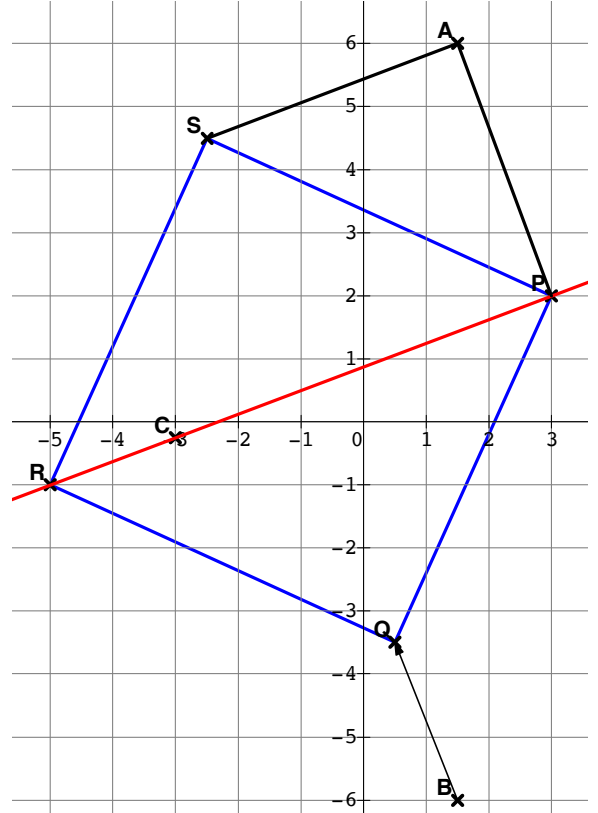
$$\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5 - i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i}{3 + 2i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i} = \frac{-11 + 5i}{5 + 11i} = \frac{(-11 + 5i)(5 - 11i)}{5^2 + 11^2}$$

$$= \frac{-55 + 121i + 25i + 55}{146} = \frac{146i}{146} = i$$

On en déduit $\left| \frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} \right| = |i| = 1$ et donc $\frac{QR}{QP} = 1$ ou encore

$QR = QP$: $PQRS$ a donc deux côtés consécutifs de même longueur et c'est donc un losange.

$\arg\left(\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $(\vec{QP}; \vec{QR}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $PQRS$ est un losange avec un angle droit donc c'est un carré.



Exercice 2

1)

$$a. \quad \frac{z_B}{z_A} = \frac{2i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2i(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{2i+2\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\left| \frac{z_B}{z_A} \right| = \frac{OB}{OA} \text{ or } \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \text{ donc } \boxed{OA = OB}$$

$$\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = (\vec{OA}; \vec{OB}) [2\pi] \text{ or } \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ donc } \boxed{(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]}$$

On en déduit que OAB est isocèle en O .

b. r est la rotation de centre O qui transforme A en B donc d'angle $\frac{\pi}{6}$. D'où $z' = e^{\frac{i\pi}{6}}(z - z_O) + z_O$ ou

$$\text{encore } \boxed{z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z}$$

2)

a. $OA = OB$ donc les rayons de Γ et Γ' sont égaux. L'image de A par r est B donc l'image de Γ par r est le cercle de centre B de même rayon que Γ donc de rayon 2. C'est bien Γ' .

$$b. \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}+2i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}$$

c. Comme C appartient à Γ , on a $AO = AC$. Comme C appartient à Γ' , on a $BO = BC$. Et comme $OA = OB$, alors on a que les quatre côtés de $OACB$ sont de même longueur. C'est donc un losange.

d. Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu donc, comme I est le milieu de $[AB]$, il est aussi le milieu de $[OC]$ et donc $z_I = \frac{z_C + z_O}{2}$ ou encore $z_C = 2z_I$. On en déduit : $\boxed{z_C = 1 + i(\sqrt{3} + 2)}$

3)

a. Comme N est l'image de B par la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a

$$n = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B - p) + p = i(2i - p) + p = \boxed{p(1 - i) - 2}$$

b. $q = \frac{z_B + n}{2} = \frac{2i + p(1-i) - 2}{2} = \boxed{p\left(\frac{1-i}{2}\right) - 1 + i}$

c. P appartient au cercle de centre O et de rayon 2 donc $|p| = 2$. On a donc

$$|q + 1 - i| = \left| p \times \frac{1-i}{2} \right| = |p| \times \left| \frac{1-i}{2} \right| = 2 \times \frac{|1-i|}{2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Ceci indique que $|q - z_D| = \sqrt{2}$ en notant D le point d'affixe $z_D = -1 + i$. On a donc $DQ = \sqrt{2}$ et donc

Q appartient au cercle de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.

Plus précisément :

$$P \in \mathcal{C}_{O;2} \Leftrightarrow \text{il existe } \theta \in]-\pi; \pi], p = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow \text{il existe } \theta \in]-\pi; \pi], q - z_D = 2e^{i\theta} \times \frac{1-i}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } \theta \in]-\pi; \pi], q - z_D = 2e^{i\theta} \times \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \Leftrightarrow \text{il existe } \theta \in]-\pi; \pi], q - z_D = \sqrt{2} e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow Q \in \mathcal{C}_{D;\sqrt{2}}$$

Ceci indique que tout le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{2}$ est bien atteint.

Exercice 3

1) Nombre de tirages de 2 boules parmi les 10 contenues dans l'urne : $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$. Tous ces tirages sont équiprobables car les boules sont indiscernables.

Nombre de tirages de 2 boules rouges parmi les 6 dans l'urne : $\binom{6}{2} = 15$

Nombre de tirages de 2 boules vertes parmi les 4 dans l'urne : $\binom{4}{2} = 6$

Il y a donc 21 tirages possibles de deux boules de la même couleur dans l'urne U_1 d'où $p_1 = \frac{21}{45} = \boxed{\frac{7}{15}}$

2) Il y a encore 45 tirages différents équiprobables car on tire encore 2 boules simultanément parmi les 10 de l'urne U_2 . Par ailleurs, on a 2 choix possibles pour la boule rouge et 8 choix possibles pour la boule verte, ce qui donne 16 tirages possibles où les deux boules sont de couleurs différentes. D'où $p_2 = \boxed{\frac{16}{45}}$

3)

a. Les résultats obtenus par le dé sont équiprobables donc on tire deux boules dans l'urne U_1 avec une probabilité de $\frac{2}{6}$ soit $\frac{1}{3}$ et on tire deux boules dans U_2 avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

b. U_1 et U_2 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(A) = p(A \cap U_1) + p(A \cap U_2) = p(U_1) \times p_{U_1}(A) + p(U_2) \times p_{U_2}(A)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{29}{45} = \frac{21 + 58}{135} = \boxed{\frac{79}{135}}$$

c.

$$p_{\bar{A}}(U_2) = \frac{p(\bar{A} \cap U_2)}{p(\bar{A})} = \frac{p(U_2) \times p_{U_2}(\bar{A})}{1 - p(A)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{16}{45}}{1 - \frac{79}{135}} = \frac{32}{135} \times \frac{135}{56} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

