

Lycée Saint-Exupéry

BAC BLANC mars 2011 - Terminales S

Epreuve de Mathématiques - Durée : 4 heures.

La qualité et la précision de votre rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points) commun à tous les élèves

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^x$.

- (0.25) Résoudre l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{E} .
- Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{E} par $u(x) = (ax+b)e^x$.
 - (0.5) Déterminer a et b pour que u soit solution de (E).
 - (0.5) Montrer que v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (F).
 - (0.5) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- (0.25) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Partie B

Soit g la fonction définie sur \mathbb{E} par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

- (0.5) Dresser le tableau de variation de g (on ne demande pas de calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).
- On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - (0.25) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
 - (0.25) L'autre solution est notée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
- (0.25) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie C

Soit f la fonction définie sur \mathbb{E} par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

- (0.5) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (0.75) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Dresser le tableau de variation de f .
- (0.5) Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la **partie B**.

Exercice 2 (5 points) pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

1. a. (0.75) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$. Étudier le sens de variation de f .
b. (0.5) On a représenté en ANNEXE la courbe représentative de f . Construire les points A_0, A_1, A_2, A_3 de l'axe (Ox) d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3 .
2. a. (1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq \sqrt{2}$.
b. (0.75) Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.
c. (0.75) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
d. (0.5) Prouver que la suite (u_n) converge.
3. (0.75) Soit L la limite de la suite (u_n) . Montrer que L est solution de l'équation : $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$. En déduire sa valeur.

Exercice 2 (5 points) pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est **A RENDRE SUR UNE FEUILLE A PART.**

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. (0.5) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
2. (1) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B :

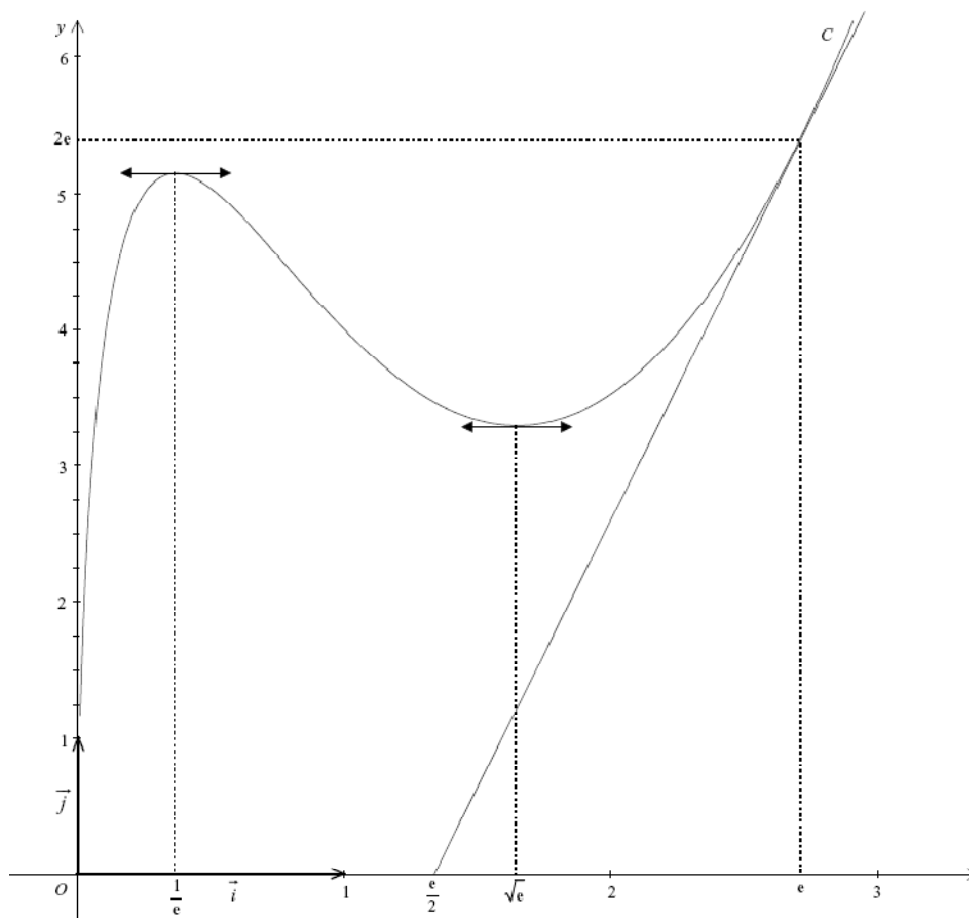
Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n ; m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad (\text{F})$$

1. (0.5) On suppose $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant $m \geq 5$.
 - a. (0.75) Montrer que si le couple $(n ; m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
 - b. (0.75) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n ; m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - c. (0.75) En déduire que si le couple $(n ; m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
 - d. (0.5) Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples $(n ; m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. (0.25) Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice 3 (5 points) commun à tous les élèves

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont la courbe représentative C dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse e et ses tangentes horizontales.



On suppose que l'on a, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$f(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b \ln x + c] \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ désignent trois réels.}$$

1.

- (0.75) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c .
- (0.5) À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'(\frac{1}{e})$, $f'(\sqrt{e})$ et $f'(e)$.
- (0.75) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, on a l'égalité :

$$f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

2. On admet que la limite de f en 0 est égale à 0.

- (0.5) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- (0.25) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a l'égalité :

$$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1)$$

- (0.75) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f . On calculera la valeur exacte de chaque extremum de f .

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note D_α la droite d'équation : $y = \alpha x$.

- (0.75) Démontrer que C et D_2 possèdent deux points d'intersection dont on calculera les abscisses.
- (0.75) Émettre des conjectures sur le nombre d'éléments de $C \cap D_\alpha$ selon les valeurs de α .
Démontrer, au choix, l'une de ces conjectures.

(La question [3.b.] demande un peu de recherche)

Exercice 4 (5 points) commun à tous les élèves

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \hat{A}, \hat{A})$.

Partie A

R.O.C.

Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances.

Soit R la rotation du plan de centre Ω , d'affixe ω et d'angle de mesure θ . L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante : $R(\Omega) = \Omega$ et pour tout point M du plan, distinct de Ω , l'image M' de M est définie par :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \theta [2\pi].$$

On rappelle que, pour des points A et B , d'affixes respectives a et b ,

$$AB = |b - a| \quad \text{et} \quad (\hat{a}, \hat{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$$

Question (0,75pt) : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R , sont liées par la relation : $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$.

Partie B

On prendra pour unité graphique 4 centimètres et on réalisera une figure sur l'ANNEXE donnée, figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-\frac{i5\pi}{6}}$.

1. Soit r , la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r .

a. (0.25) Déterminer une écriture complexe de r .

b. (0.5) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

c. (0.5) Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d. (0.25) Placer les points A , B et C .

2. Soit D le barycentre des points A , B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.

a. (0.5) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D .

b. (0.5) Montrer que A , B , C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h .

a. (0.25) Déterminer une écriture complexe de h .

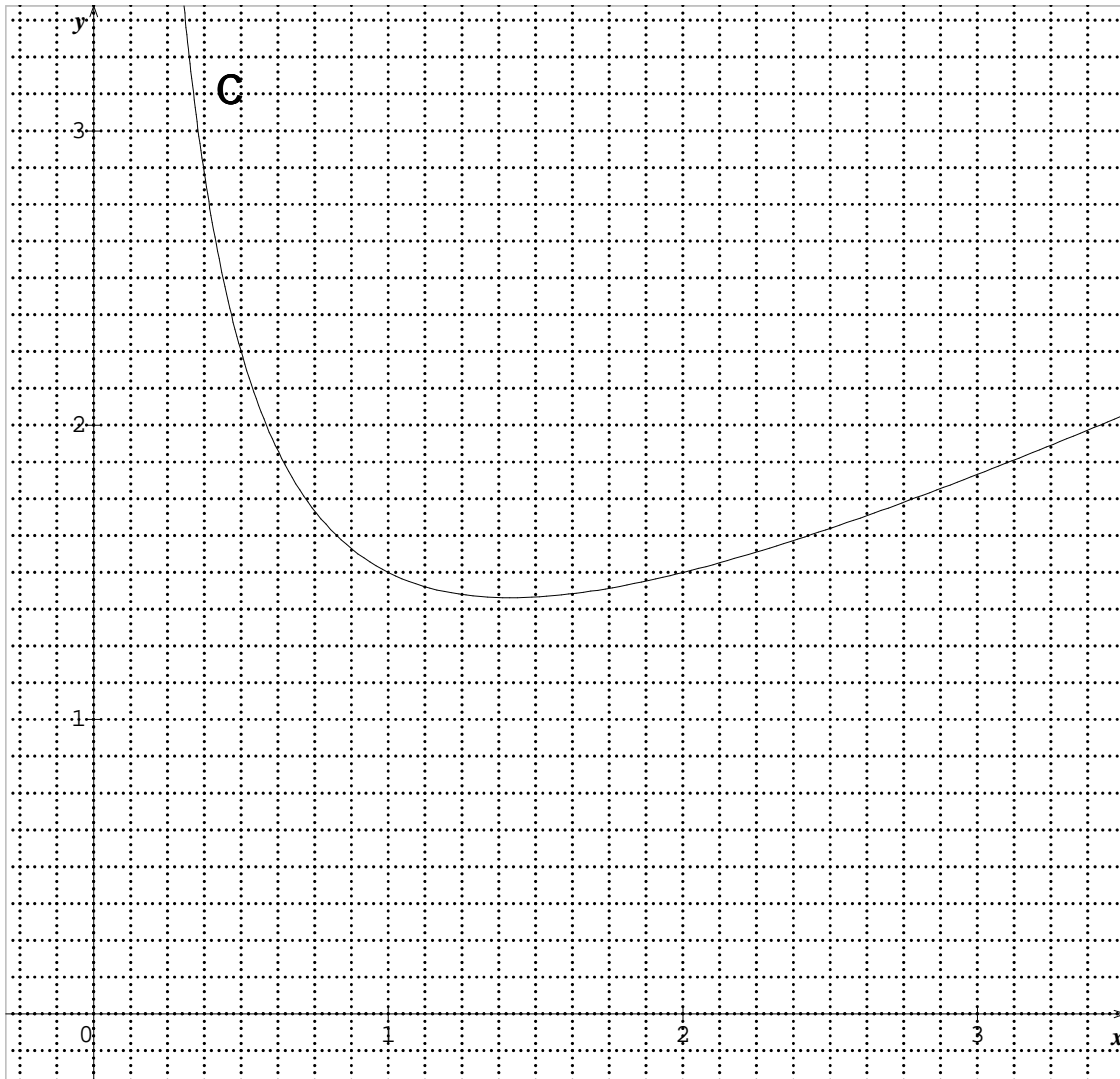
b. (0.5) Montrer que l'affixe de E est : $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E .

4. a. (0.5) Calculer le quotient : $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b. (0.5) En déduire la nature du triangle CDE .

NOM, Prénom, classe :

Exercice 2



Tournez la page

Exercice 4

