

Correction devoir surveillé n°6

Exercice 1

1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{3x+4} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right) = -\infty$$

Par addition $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

Par addition $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f est de la forme $u + \ln(v)$ avec $u(x) = \frac{1}{2}x$ dérivable sur $]1; +\infty[$ et $v(x) = \frac{x-1}{3x+4}$ strictement positive et dérivable sur $]1; +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{3x+4-3(x-1)}{(3x+4)^2} = \frac{7}{(3x+4)^2}$ donc f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{1}{2} + \frac{7}{(3x+4)^2} \times \frac{3x+4}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{7}{(3x+4)(x-1)} = \frac{(3x+4)(x-1) + 14}{2(3x+4)(x-1)} = \frac{3x^2 + x + 10}{2(3x+4)(x-1)}$$

Le dénominateur est clairement positif sur $]1; +\infty[$ tout comme le numérateur donc $f'(x) > 0$ et f est croissante.

3) Sur $]1; +\infty[$, $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \ln(3)\right) = \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right) + \ln(3) = \ln\left(\frac{3(x-1)}{3x+4}\right) = \ln\left(\frac{3x-3}{3x+4}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{3x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = \ln(1) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \ln(3)\right) = 0$$

Ceci montre que D est bien une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

4) On étudie le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \ln(3)\right)$ donc le signe de $\ln\left(\frac{3x-3}{3x+4}\right)$

$$\ln\left(\frac{3x-3}{3x+4}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{3x-3}{3x+4} > 1 \Leftrightarrow 3x-3 > 3x+4 \text{ car } 3x+4 > 0 \text{ sur }]1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow -3 > 4 \text{ ce qui est clairement faux donc } \ln\left(\frac{3x-3}{3x+4}\right) < 0 \text{ sur }]1; +\infty[\text{ et } \mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } D.$$

Exercice 2

1) f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$. Elle est donc définie pour $u(x) > 0$. Or $u(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X + 3 > 0$ en posant $X = e^x$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 = 4 \text{ donc } X^2 - 4X + 3 \text{ est du signe de } a = 1 \text{ sauf entre les racines } X_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \text{ et } X_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ donc } X^2 - 4X + 3 > 0 \Leftrightarrow X < 1 \text{ ou } X > 3 \Leftrightarrow e^x < 1 \text{ ou } e^x > 3 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \ln(3)$$

Donc $\boxed{D_f =]-\infty; 0[\cup]\ln(3); +\infty[}$

2) $f(\ln(4)) = \ln(e^{2\ln(4)} - 4e^{\ln(4)} + 3) = \ln(e^{\ln(4^2)} - 4 \times 4 + 3) = \ln(4^2 - 13) = \ln(3)$

3)

a.

$$\lim_{x \rightarrow \ln(3)} e^{2x} - 4e^x + 3 = e^{2\ln(3)} - 4e^{\ln(3)} + 3 = e^{\ln(3^2)} - 4 \times 3 + 3 = 9 - 9 = 0$$

$\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composition $\boxed{\lim_{x \rightarrow \ln(3)} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 4e^x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}} = 1$$

Donc par produit $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

b. f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$, u dérivable sur I avec $u'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$ donc f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^{2x}-4e^x}{e^{2x}-4e^x+3} = \frac{2e^x(e^x-2)}{e^{2x}-4e^x+3}$

Le dénominateur est clairement positif (ensemble de définition de f), tout comme $2e^x$ car la fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 2$:

$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2)$ donc $e^x - 2$ est positif sur I . On en déduit que f est croissante sur I

x	$\ln(3)$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ 	$+\infty$

c. Pour tout $x \in I$

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln\left(e^{2x}\left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)\right) = \ln(e^{2x}) + \ln\left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$$

On peut bien séparer les $\ln$ car tout est bien positif. D'où

$$f(x) = 2x + \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x})$$

d.

$$f(x) - 2x = \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{2x}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - 4e^{-x} + 3e^{-2x}) = 0$$

Donc D est bien une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.