

Devoir surveillé n°5

Exercice 1 (5,5 points)

- 1) On considère l'équation $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.
 - a. Résoudre cette équation dans \mathbb{C} . On notera z_1 et z_2 les deux solutions.
 - b. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2 .
- 2) On considère le polynôme $P(z) = z^3 + 4(i - \sqrt{3})z^2 + 16(1 - i\sqrt{3})z + 64i$.
 - a. Démontrer que $-4i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
 - b. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z + 4i)(az^2 + bz + c)$.
 - c. En déduire toutes les solutions de $P(z) = 0$ dans \mathbb{C} .
- 3) On considère $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$.

Montrer que $(z_3)^3$ est un imaginaire pur et que $(z_3)^{12}$ est un réel.

Exercice 2 (5,5 points)

On considère les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = 1 - i$ et $Z = (z_1)^2 \times z_2$.

- 1) Calculer la forme algébrique de Z .
- 2) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .
- 3) En déduire le module et un argument de Z .
- 4) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 (2 points)

Pour tout nombre complexe z , on pose $f(z) = z^2 - 2z + 1 - 2\bar{z} + \bar{z}^2$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ est un réel.

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixe respective i et $1 + i$.

A tout point M du plan distinct de A d'affixe z (donc $z \neq i$), on associe le point M' d'affixe z' avec

$$z' = \frac{z + 2}{iz + 1}$$

- 1) Calculer l'affixe du point B' associé à B . Dans le repère ci-contre, placer B et B' .
- 2) Déterminer l'affixe z du point C tel que $z' = i$. Placer A et C .
- 3) On considère un nombre $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ et $x + iy$ sa forme algébrique ($x, y \in \mathbb{R}$)
 - a. Exprimer les parties réelles et imaginaires de z' en fonction de x et y . En particulier, on

montrera que $m(z') = -\frac{x^2 + 2x + y^2 - y}{(1-y)^2 + x^2}$.

- b. Déterminer et tracer l'ensemble E des points M tels que z' soit un imaginaire pur.
- c. Déterminer et tracer l'ensemble F des points M tels que z' soit un réel.

