

Correction devoir surveillé n°5

Exercice 1

1)

a. $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 : \Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 16 = -16$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{4\sqrt{3}+4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$. D'où $S = \{2\sqrt{3} + 2i; 2\sqrt{3} - 2i\}$

b. Pour $z_1 : |z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc à l'aide d'un cercle trigonométrique, on a $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Pour $z_2 : |z_2| = 4$ et $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc à l'aide d'un cercle trigonométrique, on a $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$

2)

a. $P(-4i) = (-4i)^3 + 4(i - \sqrt{3}) \times (-4i)^2 + 16(1 - i\sqrt{3}) \times (-4i) + 64i$
 $= -64i^3 + 4(i - \sqrt{3}) \times 16i^2 - 64i(1 - i\sqrt{3}) + 64i = 64i - 64(i - \sqrt{3}) - 64i + 64i^2\sqrt{3} + 64i$
 $= -64i + 64\sqrt{3} - 64\sqrt{3} + 64i = 0$ donc $-4i$ est bien solution de $P(z) = 0$.

b. Pour $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = (z + 4i)(az^2 + bz + c)$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 4(i - \sqrt{3})z^2 + 16(1 - i\sqrt{3})z + 64i = az^3 + (b + 4ai)z^2 + (c + 4bi)z + 4ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 4ai = 4(i - \sqrt{3}) \\ c + 4bi = 16(1 - i\sqrt{3}) \\ 4ic = 64i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4\sqrt{3} \\ c = 16 \end{cases} \text{ donc } P(z) = (z + 4i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16)$$

c. $P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 4i = 0$ ou $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \Leftrightarrow z = -4i$ ou $z = 2\sqrt{3} + 2i$ ou $z = 2\sqrt{3} - 2i$
 en utilisant la question 1. Finalement $S = \{-4i; 2\sqrt{3} + 2i; 2\sqrt{3} - 2i\}$

3) $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i = 4e^{-\frac{i\pi}{6}}$ d'après la question 1b.

$(z_3)^3 = 4^3 \times e^{-\frac{i3\pi}{6}} = 64e^{-\frac{i\pi}{2}} = 64\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -64i$ donc $(z_3)^3$ est imaginaire pur.

$(z_3)^{12} = 4^{12} \times e^{-\frac{i12\pi}{6}} = 4^{12}e^{-2i\pi} = 4^{12}$ donc $(z_3)^{12}$ est bien un réel.

Exercice 2

1) $Z = (-\sqrt{3} + i)^2 \times (1 - i) = (3 - 2i\sqrt{3} - 1)(1 - i) = (2 - 2i\sqrt{3})(1 - i)$
 $= 2 - 2i - 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2(1 - \sqrt{3}) - 2i(1 + \sqrt{3})$

2) Pour $z_1 : |z_1| = \sqrt{3 + 1} = 2$ et $\begin{cases} \cos(\theta_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et avec un cercle trigonométrique, $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$

Pour $z_2 : |z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ et $\begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ et donc $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

3) $|Z| = |z_1^2 \times z_2| = |z_1|^2 \times |z_2| = 2^2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\arg(Z) = \arg(z_1^2 \times z_2) = \arg(z_1^2) + \arg(z_2) = 2\arg(z_1) + \arg(z_2) = 2 \times \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{12} [2\pi]$

$$4) \text{ On a donc } \begin{cases} \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \\ \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{|Z|} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \end{cases}$$

Exercice 3

On considère la forme algébrique de $z : x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 - 2(x + iy) + 1 - 2(x - iy) + (x - iy)^2 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - 2x - 2iy + 1 - 2x + 2iy + x^2 - 2ixy - y^2 \\ &= 2x^2 - 4x - 2y^2 + 1 \end{aligned}$$

Donc $f(z)$ est bien un réel.

Exercice 4

$$1) z'_B = \frac{1+i+2}{i(1+i)+1} = \frac{3+i}{i} = \frac{(3+i) \times (-i)}{i \times (-i)} = \boxed{1 - 3i}$$

$$2) \text{ Pour } z \neq i : z' = i \Leftrightarrow \frac{z+2}{iz+1} = i \Leftrightarrow z+2 = i(iz+1) \Leftrightarrow z+2 = -z+i \Leftrightarrow 2z = -2+i \Leftrightarrow z = -1 + \frac{1}{2}i$$

Donc le point C d'affixe $\boxed{-1 + \frac{1}{2}i}$ a pour image le point A d'affixe i .

3)

a. $z = x + iy$ avec $z \neq i$:

$$z' = \frac{x + iy + 2}{i(x + iy) + 1} = \frac{(x + 2 + iy)(1 - y - ix)}{(1 - y + ix)(1 - y - ix)} = \frac{x - xy - ix^2 + 2 - 2y - 2ix + iy - iy^2 + xy}{(1 - y)^2 + x^2}$$

$$z' = \frac{x - 2y + 2}{(1 - y)^2 + x^2} + i \times \frac{-x^2 - 2x - y^2 + y}{(1 - y)^2 + x^2}$$

b. Pour $z \neq i$,

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ (1 - y)^2 + x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ z \neq i \end{cases}$$

L'ensemble E est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ privé du point A d'affixe i .

c. Pour $z \neq i$,

$$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - y = 0 \\ (1 - y)^2 + x^2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ z \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\ z \neq i \end{cases}$$

F est le cercle de centre C d'affixe $-1 + \frac{1}{2}i$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A d'affixe i .

