Devoir surveillé n°4 bis

Exercice 1 (7 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O ; Å ; Å) (unité graphique 2 cm), on note A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $-i$.

A chaque point M d'affixe z, M différent de A, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z+i}{z-1+i}$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.
   Exprimer x' et y' en fonction de x et y. En particulier, montrer que $Re(z') = \frac{x^2+y^2-x+2y+1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$.
2. (E) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que M' soit sur l'axe des abscisses.
   a) Montrer que B est un point de (E)
   b) Déterminer puis représenter l'ensemble (E)
3. (F) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que M' soit sur l'axe des ordonnées.
   c) Montrer que B est un point de (F)
   d) Déterminer puis représenter l'ensemble (F)

Exercice 2 (6 points)

On considère les polynômes P et Q définis pour tout complexe z par :

$$P(z) = z^2-(1+3i)z-6+9i \quad \text{et} \quad Q(z) = z^2-(1+3i)z+4+4i$$

1. a) Calculer $P(3)$.
   b) Déterminer les complexes a et b tel que $P(z) = (z-3)(az+b)$.
2. a) On considère $z = iy$ un imaginaire pur. Ecrire $Q(iy)$ sous forme algébrique. En déduire que Q admet une racine imaginaire pure.
   b) Déterminer les complexes m et n tels que $Q(z) = (z-4i)(mz+n)$
3. On considère l'équation (E) : $(z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i) = 0$

Déduire des questions 1. et 2. les solutions de (E)

Exercice 3 (7 points)

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $a = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $b = \frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}$
2. On note j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2 puis j^3 et en déduire j^{2012}
3. Résoudre dans Ê l'équation $z^2-2z+5 = 0$
4. Résoudre dans Ê l'équation $z^4+z^2-6 = 0$