Devoir surveillé n°3 bis

Exercice 1 : QCM (4 points)

Pour chacune des questions, une seule des réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point et une absence de réponse ne change rien.

Recopier le numéro de la question accompagnée de la lettre de la réponse choisie sur la copie.

1) Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{x^2+4} = (e^{2x})^2$ admet

a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions

2) L'inéquation $e^{2x} + 3e^x - 4 \geq 0$ a pour ensemble de solutions :

a) $[1; +\infty[$ b) $[0; +\infty[$ c) $]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$

3) La limite de $\frac{e^{3x}-1}{x}$ en $-\infty$ est égale à

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

4) La limite de $\frac{2e^x-1}{e^x-2}$ en $+\infty$ est égale à

a) $+\infty$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$

Exercice 2 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^{2x} - x^2 - 3x - 4$

1) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Démontrer que $h'(x) = (2x+3)(e^{2x} - 1)$ et étudier les variations de h.
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 1.

Exercice 3 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$.

Partie A : Conjectures graphiques

1) Tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé et indiquer sans justification, les variations de f sur $[-3; 2]$.
2) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 0$.

Partie B : Contrôle des conjectures

1) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = xg(x)$ avec $g : x \mapsto (x+2)e^{x-1} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
2) Etude de g
   a. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Calculer g' et en déduire le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
   c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ que nous noterons α. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   d. Déduire des questions précédentes le signe de g sur $\mathbb{R}$.
   e. Montrer que $e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$
3) Dresser le tableau de variations de f. Cela correspond-il à vos observations de la partie A ?

Partie C :

1) En utilisant la question B2e. , montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2) On considère la fonction $h : x \mapsto -\frac{x^3}{2(x+2)}$ définie sur $[0; 1]$.
   a. Etudier les variations de h sur $[0; 1]$.
   b. A l'aide de l'encadrement de α de la question B2c., déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.