Devoir surveillé n°3

Exercice 1 : QCM (4 points)

Pour chacune des questions, une seule des réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point et une absence de réponse ne change rien.

Recopier le numéro de la question accompagnée de la lettre de la réponse choisie sur la copie.

1) Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet

a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions

2) L'inéquation $e^{x} \geq xe$ a pour ensemble de solutions :

a) $\emptyset$ b) $[1; +\infty[$ c) $\mathbb{R}$

3) La limite de $\frac{e^{3x}-1}{x}$ en 0 est égale à

a) 1 b) 3 c) 9

4) La limite de $\frac{2e^{x}-1}{e^{x}-2}$ en $-\infty$ est égale à

a) $+\infty$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$

Exercice 2 : (6 points)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x} - \frac{x}{e}$.

1) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Etudier les variations de h.
3) Démontrer que la droite D d'équation $y = -\frac{x}{e}$ est une asymptote oblique à la courbe de h en $-\infty$.
4) Démontrer que la tangente à la courbe de h au point d'abscisse a a pour équation

$$y = \left(e^{a} - \frac{1}{e}\right)x + (1-a)e^{a}$$

5) Démontrer qu'il existe une unique tangente à la courbe de h passant par l'origine du repère.

Exercice 3 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (x+3)e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire</u>

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (x+2)e^{-x}$.

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Calculer la dérivée de g et montrer que g' est du signe de $(x+1)$.
3) Dresser le tableau de variations de g.
4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, que nous noterons α et β avec $\alpha < \beta$.
   Donner un encadrement à 10^{-1} près de chacune de ces deux solutions.
5) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de g.

<u>Partie B : Etude de la fonction f</u>

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Montrer que $f' = g$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ et $\mathcal{C}$ se coupent en un point A donc on précisera les coordonnées.
4) Etudier les positions relatives de D et $\mathcal{C}$.