

Correction devoir surveillé n°2 bis

Exercice 1

f est continue en 1 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{6}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{6})(\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{6})}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{6})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5 - 6}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{6})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{6})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{6}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = f(1)$$

Donc f est bien continue en 1.

Exercice 2

1) f est de la forme $\sqrt{u}$ donc est définie pour $u(x) \geq 0$. Or

$$1 - (2x + 1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^3 \leq 1 \Leftrightarrow 2x + 1 \leq 1 \text{ car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; 0]$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)^3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (2x + 1)^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

3) f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 - (2x + 1)^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $] -\infty; 0[$ avec $u'(x) = -3 \times 2(2x + 1)^2 = -6(2x + 1)^2$ donc f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = -\frac{6(2x + 1)^2}{2\sqrt{1 - (2x + 1)^3}} = -\frac{3(2x + 1)^2}{\sqrt{1 - (2x + 1)^3}}$$

4) On voit clairement que f' est négatif sur $] -\infty; 0[$ donc f est décroissante sur $] -\infty; 0[$

Exercice 3

1) f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$.

f' est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x + 1)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
Signe de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f'	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	-1	$+\infty$	

2) Sur $] -\infty; 0]$, le maximum de f est $-\frac{3}{4}$ donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solutions.

Sur $[0; +\infty[$, f' est continue car dérivable, strictement croissante et 0 appartient bien à $f([0; +\infty[)$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution α .

A la calculatrice, on trouve $\boxed{0 < \alpha < 1}$

3)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$		$+\infty$

4) Comme $0 < \alpha < 1$, on a $0 < \alpha^4 < 1$; $0 < \alpha^3 < 1$; $-1 < -\alpha < 0$ donc en additionnant terme à terme ces inégalités et en ajoutant 1, on obtient : $\boxed{0 < f(\alpha) < 3}$