

Devoir surveillé n°2**Exercice 1 : ROC – 2 points**

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .
Démontrer que f est continue sur I .

Exercice 2 – 4 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{2}{3} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

- 1) Démontrer que f est continue en 2.
- 2) La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 – 4 points

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée.

$$1) f: x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$2) g: x \mapsto \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 4 – 2 points

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$$

Exercice 5 – 8 points**Partie A**

On considère la fonction $g: x \mapsto x^3 - x^2 + 3x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

- 1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Etudier les variations de g .
- 3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution x_0 dans \mathbb{R} et donner un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.
- 4) En déduire le signe de g sur \mathbb{R} .

Partie B

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2 + 1}$$

- 1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Calculer f' et démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
- 3) Déduire des questions précédentes les variations de la fonction f .
- 4) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} de f . Etudier les positions relatives de D et \mathcal{C} .
- 5) Existe-t-il des points de la courbe \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite D ? Justifier.