

Correction devoir surveillé n°2

Exercice 1 : voir le cours

Exercice 2

1) Pour $x \neq 2$, comme $\sqrt{x^2 + 5} + 3 \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \frac{x^2 + 5 - 9}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{2 + 2}{\sqrt{2^2 + 5} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = f(2)$$

Donc f est bien continue en 2.

2) Pour $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - \frac{2}{3}}{x - 2} = \frac{3x + 6 - 2\sqrt{x^2 + 5} - 6}{3(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{(3x - 2\sqrt{x^2 + 5})(3x + 2\sqrt{x^2 + 5})}{3(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(3x + 2\sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \frac{9x^2 - 4(x^2 + 5)}{3(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(3x + 2\sqrt{x^2 + 5})} = \frac{5(x - 2)(x + 2)}{3(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(3x + 2\sqrt{x^2 + 5})} \\ &= \frac{5(x + 2)}{3(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(3x + 2\sqrt{x^2 + 5})} \text{ donc} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{5 \times 4}{3 \times 6 \times (6 + 6)} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = \frac{5}{54}$.

Exercice 3

1) f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$ qui est une fonction rationnelle dont dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{1\}$ et strictement positive pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ avec $u'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$ donc f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \boxed{-\frac{1}{(x-1)^2} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

2) g est de la forme $v \circ u$ où $u(x) = 3x + \frac{\pi}{2}$ et $v(x) = \cos^2 x$.

u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2(-\sin(x)) \cos(x) = -2 \sin(x) \cos(x)$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 3 \times \left(-2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{-6 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Exercice 4

On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc on a $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} = \frac{1}{2}}$$

Exercice 5

Partie A

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \boxed{+\infty} \text{ et de même } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$$

2) g est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

Pour étudier le signe de g' qui est un polynôme du second degré, on calcule son discriminant : $\Delta = -32$ donc $g'(x)$ est toujours du signe de $a = 3$ donc positif et la fonction g est strictement croissante.

3) g est une fonction continue car dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 0 appartient bien à $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Grâce à la calculatrice, $g(-1) = -4$ et $g(0) = 1$ donc $-1 \leq x_0 \leq 0$.

$g(-0,3) = -0,017$ et $g(-0,2) = 0,352$ donc $-0,3 \leq x_0 \leq -0,2$.

$g(-0,3) = -0,017$ et $g(-0,29) \approx 0,022$ donc $\boxed{-0,3 \leq x_0 \leq -0,29}$.

4) Comme g est strictement croissante et que $g(x_0) = 0$, nous pouvons dire que g est négative sur $]-\infty; x_0]$ et positive sur $[x_0; +\infty[$.

Partie B

1) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \boxed{-\infty} \text{ et de même } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$$

2) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 1 + 2 \times \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Or } (x + 1)g(x) = (x + 1)(x^3 - x^2 + 3x + 1) = x^4 - x^3 + 3x^2 + x + x^3 - x^2 + 3x + 1 = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$$

$$\text{Donc nous avons bien } \boxed{f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}}$$

3) Grâce à la partie A, on construit le tableau de signe de $f'(x)$ (qui est du signe de son numérateur car son dénominateur est clairement positif) puis le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	x_0	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
Variation de f	$-\infty$	-2	$f(x_0)$	$+\infty$

4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \text{ et de même } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$$

Donc $\boxed{\text{la droite } D \text{ d'équation } y = x \text{ est bien une asymptote oblique à } \mathcal{C}}$.

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et D , on étudie le signe de $f(x) - x$, c'est-à-dire le signe de $-\frac{1}{x^2+1}$ or ceci est clairement négatif donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est en dessous de } D}$.

5) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$. Pour être parallèle à D , cette tangente doit avoir le même coefficient directeur donc on doit résoudre $f'(a) = 1$.

$$f'(a) = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{4a}{(a^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4a}{(a^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$\boxed{\text{Donc il existe bien un point de } \mathcal{C} \text{ où la tangente est parallèle à } D, \text{ c'est le point } A(0; -2)}$.