Devoir surveillé n°1 bis

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la suite (v_n).
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) On considère la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que $S_n = n - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes et lorsque c'est possible, interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{9x+7}} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+6}-3}{x-1} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x-4}{x^2-3x+2}$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.