

Correction devoir surveillé n°1 bis

Exercice 1

$$1) \quad u_1 = \frac{3u_0+1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{3u_1+1}{4} = \frac{\frac{3}{4}+1}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

2)

a. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 1}{4} - 1 = \frac{3(v_n + 1) + 1}{4} - 1 = \frac{3v_n + 4 - 4}{4} = \frac{3}{4}v_n$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = -1$.

$$b. \quad \text{Pour } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Comme $u_n = v_n + 1$, on trouve bien : $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3) On veut montrer par récurrence sur n que $S_n = n - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Initialisation : on veut montrer que la propriété est vraie au rang 0, c'est-à-dire que $S_0 = 0 - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0$

Or $S_0 = u_0 = 0$ et $0 - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = -3 + 3 = 0$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , la propriété est vraie, c'est-à-dire $S_n = n - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire $S_{n+1} = n - 2 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$\text{Or } S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = n - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = n - 2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \left[3 - \frac{3}{4}\right] = n - 2 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{9}{4}$$

$$= n - 2 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $S_n = n - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Exercice 2

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{9x+7} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{9x} = \frac{4}{9} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{4}{9}} \sqrt{x} &= \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \text{ par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{9x+7}} = \frac{2}{3}$$

Pour la deuxième limite, on se retrouve dans un cas de forme indéterminée. 1 étant racine du numérateur et du dénominateur, on peut les factoriser par $(x - 1)$.

On cherche donc a, b, c et d tels que $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(ax + b)$ et $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(cx + d)$.

Pour la première : $x^2 - 5x + 4 = ax^2 + (b - a)x - b$ donc par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -5 \\ -b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$

D'où $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$.

De la même manière : $x^2 - 3x + 2 = cx^2 + (d - c)x - d$ donc $\begin{cases} c = 1 \\ d - c = -2 \end{cases}$ et donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{x - 2} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = \boxed{3}$$

Pour la troisième limite, on utilise l'expression conjuguée : pour x tel que $x \neq 1$ et $\sqrt{3x + 6} + 3 \neq 0$

$$\frac{\sqrt{3x+6}-3}{x-1} = \frac{(3x+6)-3^2}{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)} = \frac{3x+6-9}{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)} = \frac{3x-3}{(x-1)(\sqrt{3x+6}+3)} = \frac{3}{\sqrt{3x+6}+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+6}-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+6}+3} = \frac{3}{\sqrt{9}+3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Pour la quatrième limite, nous avons besoin du signe de $x^2 - 3x + 2$ or les racines sont 1 et 2 et un trinôme est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines. Donc, comme $x > 1$, $x^2 - 3x + 2$ est négatif.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} x - 4 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3x + 2 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc par quotient } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} = +\infty}$$

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (x + 1) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - x - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{9}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{9}{x^2}\right)}} = \frac{x - x\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}{x \times \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 + x}} = \frac{1 - 1}{1} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$$

Ceci montre que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.