Devoir surveillé n°1

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{5}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1) Calculer u_1.
2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-\frac{2}{5}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
   a. Calculer v_0 et v_1.
   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour $n\in\mathbb{N}$. En déduire la nature de la suite (v_n).
   c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire que $u_n=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
3) Etudier les variations de (u_n).
4) On considère la somme $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que $S_n=\frac{1}{5}\left[2n+3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{4-2x}-2}{x^2}\quad ;\quad \lim_{x\to 4}\frac{24+2x-2x^2}{4-x}\quad ;\quad \lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{3-\pi x}{2x+1}\right)\quad ;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\sqrt{x}}{2-x^2}$$

Exercice 3

On considère la fonction $f: x\mapsto\sqrt{9x^2+6x+5}$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=3x+1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Exercice 4

On considère les deux fonctions $f: x\mapsto\frac{x+4}{3-2x}$ et : $x\mapsto\frac{6x-1}{4x+3}$.

Déterminer l'expression simplifiée de la fonction $f\circ g$ après avoir préciser son ensemble de définition.

Exercice 5

On considère une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.

1) On suppose que $\mathcal{C}$ admet une droite D d'équation $y=ax+b$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

On note g la fonction $x\mapsto f(x)-(ax+b)$. Nous avons donc que la limite de g en $+\infty$ est égale à 0.

   a. Montrer que la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ est égale à a.
   b. Montrer que la limite de $f(x)-ax$ en $+\infty$ est égale à b.
2) Réciproquement, on suppose qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\ \text{ et }\ \lim_{x\to+\infty}f(x)-ax=b$$

Démontrer que la droite D d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3) Application : on considère : $x\mapsto\frac{x^2+5}{2x+1}$. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.