

Correction devoir surveillé n°1

Exercice 1

$$a. \quad u_1 = \boxed{\frac{9}{20}} ; \quad v_0 = \boxed{\frac{1}{10}} \quad v_1 = \boxed{\frac{1}{20}}$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{10}$.

$$a. \quad \text{Pour } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et comme } u_n = v_n + \frac{2}{5}, \text{ on obtient } \boxed{u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{5} - \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1}{2} - 1\right] = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 0$$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

4) Initialisation : on veut montrer que la propriété est vraie au rang 0, c'est-à-dire que

$$S_0 = \frac{1}{5} \left[2 \times 0 + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} \right] \text{ or } S_0 = u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{5} \left[2 \times 0 + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} \right] = \frac{1}{5} \times \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ donc c'est vrai.}$$

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n , la propriété est vraie, c'est-à-dire $S_n = \frac{1}{5} \left[2n + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire $S_{n+1} = \frac{1}{5} \left[2(n+1) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+1} \right]$

$$\begin{aligned} \text{Or } S_{n+1} &= u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{1}{5} \left[2n + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{2n + 3 + 2}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right] = \frac{2n + 5}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5} \left[2n + 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[2n + 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right] = \frac{1}{5} \left[2(n+1) + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+1} \right] \end{aligned}$$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $\boxed{S_n = \frac{1}{5} \left[2n + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]}$

Exercice 2

Pour la première limite, nous avons une forme indéterminée. Nous utilisons l'expression conjuguée : pour $x \neq 0$

$$\frac{(\sqrt{4-2x}-2)(\sqrt{4-2x}+2)}{x^2(\sqrt{4-2x}+2)} = \frac{4-2x-2^2}{x^2(\sqrt{4-2x}+2)} = -\frac{2}{x(\sqrt{4-2x}+2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} -2 &= -2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x(\sqrt{4-2x}+2) &= 0 \times (\sqrt{4-0}+2) = 0^+ \end{aligned} \right\} \text{ donc par quotient } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{4-2x}-2}{x^2} = -\infty}$$

Pour la deuxième limite, nous avons une forme indéterminée. Nous allons factoriser le numérateur par $x - 4$. Pour cela, on cherche a et b tels que $24 + 2x - 2x^2 = (x - 4)(ax + b)$.

$(x - 4)(ax + b) = ax^2 + (b - 4a)x - 4b$ et par identification avec $-2x^2 + 2x + 24$, on trouve :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - 4a = 2 \\ -4b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases} \text{ donc } \frac{-2x^2 + 2x + 24}{4 - x} = \frac{(x-4)(-2x-6)}{-(x-4)} = 2x + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{24 + 2x - 2x^2}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4} 2x + 6 = 2 \times 4 + 6 = \boxed{14}$$

Pour la troisième limite, on utilise les fonctions composées :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \pi x}{2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi x}{2x} = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(x) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{aligned} \right\} \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{3 - \pi x}{2x + 1}\right) = -1}$$

Pour la quatrième limite, on factorise par les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{-x + \sqrt{x}}{2 - x^2} = \frac{x\left(-1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x^2} - 1\right)} = \frac{-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{x\left(\frac{2}{x^2} - 1\right)}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} &= 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} &= 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\frac{2}{x^2} - 1\right) = -\infty \left\} \text{ par quotient } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x}}{2 - x^2} = 0}$$

Exercice 3

1) f est définie pour les valeurs de x telles que $9x^2 + 6x + 5 \geq 0$ or $\Delta = 36 - 4 \times 9 \times 5 = -144 < 0$ donc $9x^2 + 6x + 5$ est toujours du signe de $a = 9$ donc toujours positif et f est définie sur $\mathbb{R}$.

2)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 9x^2 + 6x + 5 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 9x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc par composition } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

De la même manière, comme la limite de $9x^2 + 6x + 5$ en $-\infty$ est la même que celle en $+\infty$, on trouve

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

3) En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) - (3x + 1) &= \frac{(\sqrt{9x^2 + 6x + 5} - (3x + 1))(\sqrt{9x^2 + 6x + 5} + (3x + 1))}{\sqrt{9x^2 + 6x + 5} + (3x + 1)} \\ &= \frac{9x^2 + 6x + 5 - 9x^2 - 6x - 1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 5} + (3x + 1)} = \frac{4}{\sqrt{9x^2 + 6x + 5} + 3x + 1} \\ \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 6x + 5} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc par addition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 6x + 5} + 3x + 1 = +\infty \text{ puis par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (3x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{D}$ est bien une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Exercice 4

Ensemble de définition de $f \circ g$:

$$x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{4} \text{ et } g(x) \neq \frac{3}{2}$$

Pour la second condition, résolvons $g(x) = \frac{3}{2}$:

$$g(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{6x-1}{4x+3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(6x-1) = 3(4x+3) \Leftrightarrow 12x-2 = 12x+9 \Leftrightarrow -11 = 0 \text{ ce qui est impossible donc}$$

l'équation n'a pas de solution et $g(x)$ n'est jamais égal à $\frac{3}{2}$. Finalement $\boxed{D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}}$

Pour $x \in D_{f \circ g}$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{6x-1}{4x+3}\right) = \frac{\frac{6x-1}{4x+3} + 4}{3 - 2\frac{6x-1}{4x+3}} = \frac{6x-1+4(4x+3)}{3(4x+3)-2(6x-1)} = \frac{22x+11}{11} = \boxed{2x+1}$$

Exercice 5

1)

a. Pour $x \in [0; +\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x) + ax + b}{x} = \frac{g(x)}{x} + a + \frac{b}{x} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ donc par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ donc par somme $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a}$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + b = \boxed{b} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = 0 \text{ donc en ajoutant } b, \text{ on trouve } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0}$$

Ceci montre que la droite D est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3) f est bien définie sur $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{x(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \text{ donc } a = \frac{1}{2}$$

Pour $x \geq 0$:

$$f(x) - ax = \frac{x^2 + 5}{2x + 1} - \frac{x}{2} = \frac{2(x^2 + 5) - x(2x + 1)}{2(2x + 1)} = \frac{2x^2 + 10 - 2x^2 - x}{4x + 2} = \frac{10 - x}{4x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - x}{4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{4x} = -\frac{1}{4} \text{ donc } b = -\frac{1}{4}$$

Finalement la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.